Przejawy obecności pola kwintesencji w modelach kosmologicznych

Michał Frąckowiak

praca magisterska pod kierunkiem
dr hab. Bronisława Rudaka, prof. UMK

Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Toruń, 2002

Chciałbym złożyć gorące podziękowania na ręce promotora, dr hab. Bronisława Rudaka, za podjęcie się prowadzenia tej pracy, pomoc, cenne uwagi i komentarze. Dziękuję również Dyrekcji Pracowni Astrofizyki nr 1 Centrum Astronomicznego im. Mikołaja Kopernika w Toruniu za stworzenie wymarzonych warunków do pracy. Specjalne podziękowania dla mojej Żony.

Spis treści

1 Wprowadzenie **1**

1.1 Słów kilka o kosmologii . . . 1

1.2 Problem stałej kosmologicznej . . . 2

2 Podstawy teoretyczne **5**

2.1 Skalarno-tensorowa teoria grawitacji . . . 5

2.2 Jednorodność i izotropia wszechświata — metryka FRW . . . 7

2.3 Równania Friedmanna . . . 10

2.4 Kwintesencja — historia wszechświata a dynamika pola . . . 14

3 Możliwości obserwacyjne **21**

3.1 Pomiary blasku supernowych typu Ia . . . 21

3.2 Anizotropia kosmicznego promieniowania tła (CMB) . . . 23

4 Analiza danych **29**

4.1 Oprogramowanie i metody analizy . . . 29

4.2 Analiza danych dotyczących supernowych . . . 31

4.2.1 Odtworzenie znanych rezultatów . . . 31

4.2.2 Pełna analiza . . . 34

4.3 Analiza danych dotyczących anizotropii CMB . . . 38

4.3.1 Zależność rozkładu multipolowego od parametrów modelu . . . 38

4.4 „Najlepszy z wszechświatów” . . . 39

4.5 Nowy projekt — szybkie generowanie rozkładu CMB . . . 44

5 Wnioski **47**

A Dane wykorzystane przy analizie blasku supernowych Ia **51**

B Dane wykorzystane przy analizie fluktuacji CMB **53**

C Metoda największej wiarygodności **55**

Wprowadzenie

1.1 Słów kilka o kosmologii

Kosmologia i pytania dotyczące Wszechświata przyciągały najwybitniejsze umysły ludzkie na przestrzeni wieków. W niezliczonych dziełach pojawiały się próby odpowiedzi na zagadki naszego świata, kreśląc mniej lub bardziej zawiłe obrazy wszechrzeczy. Rozważania tego typu aż do początków XVII wieku, kiedy pojawiły się możliwości obserwacji kosmosu, były jednak oparte głównie na systemach filozoficznych (lub teologicznych) i miały niewiele wspólnego z nauką, jaką próbujemy uprawiać dziś. Brak aparatu matematycznego (i teorii względności, którą się obecnie posługujemy) oraz sprzętu obserwacyjnego, a przede wszystkim zakorzeniony gleboko szacunek dla autorytetu konserwatywnego Kościoła i niepodważalny geocentryzm (spuścizna głównie po Arystotelesie, „zaadoptowanym" przez teologów średniowiecznych) sprawiły, że rozumienie nauki było aż po XVI wiek zupełnie inne.

Nowe możliwości pojawiły się wraz z konstrukcją teleskopu. I choć już Kopernik postulował usunięcie Ziemi z centum Wszechświata (bo wówczas pojęcie to odnosiło się właśnie do Układu Słonecznego — jakże blisko z dzisiejszej perspektywy), to dopiero początek XVII wieku przyniósł przełom w obserwacjach astronomicznych. Wiele jednak czasu upłynęło, zanim oko nauki zdołało sięgnąć poza nasz Układ, a Ziemia ostatecznie została uznana za niczym niewyróżniającą się planetę krążącą wokół przeciętnej gwiazdy w jednej z niezliczonych galaktyk.

To dopiero w 1918 roku Harlow Shapley wysunął wniosek, że Słońce nie leży w centrum Galaktyki (bardzo zresztą wówczas kontrowersyjny), a w 1952 roku Walter Blaade wykazał, że Droga Mleczna jest jak najbardziej typową galaktyką! Warto zwrócić uwagę, jak wielkie triumfy święciła już w tym czasie mechanika kwantowa — rewolucyjna teoria mikroświata, której przewidywania doskonale zgadzały się z doświadczeniem. Czego na pewno nie można powiedzieć o ówczesnej kosmologii.

Pierwszym sensownym modelem kosmologicznym był model oparty na klasycznej grawitacji newtonowskiej. Ponieważ jednak rozważania prowadziły częściej do paradoksów niż rozwiązań, kosmologia pozostała domeną filozofów i pojawiała się jakby przy okazji uprawiania nauki. Wszystko to zaczęło się zmieniać po 1915 roku, kiedy Albert Einstein opublikował swoją Ogólną Teorię Względności. Do 1924 znano już podstawowe rozwiązania dla wszechświatów otwartych, zamknietych, płaskich — statycznych i nie (głównie za sprawą samego Einsteina, Lemaître'a, de Sittera i Friedmanna). Ekspansja naszego Wszechświata została zapostulowana przez Hubble'a dopiero w 1929 roku.

I choć postęp teoretyczny był przyzwoity, obraz świata nadal pozostawał tylko obrazem na papierze. Praktycznie zupełny brak możliwości obserwacyjnej weryfikacji odsunął rozważania kosmologiczne na drugi plan.

Zainteresowanie kosmologią odrodziło się, nawet jak na skalę czasu rozwoju nauki, stosunkowo niedawno. Bo dopiero pod koniec ubiegłego stulecia pojawiły się na tyle doskonałe przyrządy astronomiczne i na tyle zaawansowane projekty, że umożliwiły obserwację subtelnych przewidywań modeli kosmologicznych. W 1991 roku satelita COBE[1] rozstrzygnął problem reliktowego promieniowania tła[2] — o rozkładzie ciała doskonale czarnego, mocnego argumentu za teorią Wielkiego Wybuchu, a w 1998 roku pomiar blasku supernowych typu Ia wykazał, że około 70% masy całego Wszechświata skupiona jest w postaci tak zwanej ciemnej energii — stałej kosmologicznej (lub czegoś podobnego, dotychczas prawie w ogóle nie branej pod uwagę), której to poświęcona jest poniższa praca. Obecnie planuje się także kilka interesujących eksperymentów kosmologicznych. Wzrost zainteresowania kosmologią jest niesamowity. Jeśli wziąć pod uwagę, że kilka lat temu obraz Wszechświata zaczął się wyłaniać z mgły niewiedzy, to można pokusić się o twierdzenie, że następne lata przyniosą dużo więcej fascynujących odkryć.

1.2 Problem stałej kosmologicznej

Historia stałej kosmologicznej jest bardzo ciekawa i została doskonale opisana choćby w Goldsmith (1998).

Podczas rozwiązywania równań OTW, Einstein natrafił na dość poważny dla siebie problem. Jako że nie mógł pogodzić się z niestatycznymi rozwiązaniami (ekspansją lub kontakcją części przestrzennej), które w sposób naturalny pojawiały się w rozwiązaniach, wprowadził do równań dodatkowy człon proporcjonalny do tensora metrycznego, a współczynnik proporcjonalności nazwał *stałą kosmologiczną*. Z czysto matematycznego punktu widzenia człon ten „nie psuje" równań — czterodywergencja każdej ze stron pozostaje równa zero. Stałą kosmologiczną można traktować jako energię próżni, tworząc z niej tensor energii-pędu próżni. Jednak powód, dla którego pusta przestrzeń miałaby mieć niezerową energię, pozostawał (i pozostaje do dziś) niejasny.

Einstein nie uznawał ekspansji Wszechświata. Podczas spotkania (w 1927 roku) z Lemaîtrem, który pokazał mu swoje prace dotyczące bardziej zawiłych modeli kosmologicznych, uwzględniających między innymi ciśnienie promieniowania i różne krzywizny przestrzeni, twórca Teorii Względności wyznał, że mimo poprawności matematycznej teorii, on sam po prostu nie wierzy w rozszerzający się Wszechświat. Lemaître potem skomentował to spotkanie, jakoby Einstein nie zdawał sobie sprawy z nowych faktów astronomicznych. Jednak w 1930 roku, po rozmowie z Hubblem, Einstein zmienił zdanie, a wprowadzenie stałej kosmologicznej nazwał „najwiekszą pomyłką swojego życia". Później, choć dla formalności wciąż

[1] *COsmic Background Explorer*, `http://space.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/cobe_home.html`

[2] CMB — *Cosmic Microwave Background*, czasem także używany skrót CBR — *Cosmic Background Radiation*

rozważano jej istnienie, nie odgrywała praktycznie żadnej roli w rozwoju teorii kosmologicznych. I tak byłoby zapewne do dziś, gdyby czynnik ten można było faktycznie zaniedbać — okazuje się jednak, że tak nie jest. Zespół SCP[3] opublikował pracę (Perlmutter et al., 1999), w której oszacowano prawdopodobieństwo dodatniej stałej kosmologicznej na 99% i stwierdzono, że tempo ekspansji Wszechświata wzrasta, zamiast maleć, jak powszechnie sądzono — co obowiązywałoby dla wszechświata bez stałej kosmologicznej. Wniosek ten został potwierdzony niezależnie przez inny zespół badający jasności supernowych Ia[4] oraz poprzez badanie pewnych subtelności w rozkładzie kwazarów (Roukema et al., 2002). Również badanie pól prędkości i dynamiki wielkich struktur we Wszechświecie (np. Juszkiewicz et al., 2000) wskazuje, że oddziałującej grawitacyjnie materii jest stosunkowo mało — o wiele za mało, aby otrzymać spodziewaną skądinąd gęstość Wszechświata.

Obecnie, choć istnieje wielu konserwatystów, wróżących rychły upadek idei stałej kosmologicznej (czy innych jej substytutów, o czym dalej), to zdaje się, że niektórych wyników nie dałoby się zinterpretować, gdyby Wszechświat wypełniała wyłącznie materia — zwykła, jaką znamy, i „ciemna"[5], również oddziałująca grawitacyjnie, o którą rozgrywa się swoisty wyścig między fizykami wysokich energii i cząstek elementarnych.

Stała kosmologiczna jest niewygodna z kilku powodów. Przede wszystkim nie znamy jej fizycznego uzasadnienia. Kwantowanie swobodnego pola elektromagnetycznego daje stan podstawowy o nieskończonej energii. W kwantowej teorii pola niedogodność ta już nie występuje i energia próżni (efekt cząstek wirtualnych i innych zjawisk) przyjmuje skończony poziom, jednak w tym wypadku różnica pomiędzy oczekiwaną wartością energii próżni (z teorii), a tą mierzoną obecnie poprzez jej wpływ na ekspansję Wszechświata, to — bagatela — czynnik 10^{120} (Carroll, 2001)! Jest to zdecydowanie największa rozbieżność między teorią a eksperymentem w historii nauk przyrodniczych i jeden z ważniejszych argumentów za tym, że to nie stała kosmologiczna (jako energia próżni) odpowiada za przespieszoną ekspansję.

Bez wątpienia potrzebny jest jakiś dodatkowy czynnik, by wyjaśnić dane obserwacyjne. Jako że stała kosmologiczna jest niewygodna, pojawiają się próby zastąpienia jej. Można by bowiem założyć, że energia próżni znika w wyniku jeszcze nie znanej symetrii, natomiast za przyspieszoną ekspansję odpowiada inne zjawisko. Teoretycznie tworem takim może być ewoluujące pole skalarne, dodane do tensorowej teorii OTW. Pomysł ten, odgrzany ostatnio i ochrzczony chwytliwą (i nieźle sprzedającą się) nazwą *kwintesencja*[6], (Steinhardt et al., 1998) staje się poważną alternatywą dla „sztywnej lambdy".

Pola skalarne są w kwantowej teorii pola używane do opisu bozonów o zerowym spinie. Tak więc kwintesencja mogłaby reprezentować takie cząstki, jeszcze nie znane fizyce, rozproszone po Wszechświecie. Byłyby one na przykład pozostałościami po złamaniu symetrii GUT[7] i

[3] *Supernova Cosmology Project*, `http://www-supernova.lbl.gov/`

[4] *The High-Z SN Search Team* (Riess et al., 1998), `http://cfa-www.harvard.edu/cfa/oir/Research/supernova/HighZ.html`

[5] ang. *Dark Matter*

[6] ang. *quintessence*

[7] *Grand Unified Theory* — Zunifikowana Teoria Wszystkiego, Święty Graal fizyki

jako ultralekkie cząstki wypełniały obecny Wszechświat. Lekkość (która wynika z analizy ich potencjału) czyni je równie trudnymi do znalezienia, jak cząstki supermasywne.

Pole skalarne daje jeszcze jedną korzyść — pozwala uniknąć dziwnego zbiegu okoliczności, znanego w literaturze jako *cosmic coincidence* lub *fine tuning problem*. Otóż znajdujemy się na skraju dwóch epok: epoki dominacji materii i epoki dominacji stałej kosmologicznej. W tej pierwszej — ekspansja zwalnia pod wpływem oddziaływań grawitacyjnych, w drugiej zaś — przyspiesza. Aby tak się stało, w chwili, dokąd sięga nasz aparat naukowy (to znaczy wstecz do epoki Plancka), wartości gęstości materii i stałej kosmologicznej musiałyby być ustalone z niesamowitą wręcz precyzją, sięgającą około 60 miejsc po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym. Kwintesencja ma zaś tę zaletę, że przy odpowienim jej wyborze (potencjału pola), rozwiązania są zbieżne do dzisiejszych wartości i układ jest mało wrażliwy na warunki początkowe. Jest to poniekąd przeniesienie problemu na inny obszar, bo teraz precyzyjnie ustalony musi być potencjał pola, ale jest to rozwiązanie eleganckie i warte uwagi. Być może w przyszłości z teorii GUT otrzymamy właśnie taki potencjał...

W kolejnych rozdziałach pracy zostaną przedstawione podstawy teoretyczne kosmologii opartej na tensorowo-skalarnej teorii grawitacji oraz wyprowadzone równania Friedmanna. Na bazie teorii przedstawię możliwości weryfikacji oraz własną analizę danych z projektów SCP, BOOMERanG[8] oraz MAXIMA[9].

[8] *Baloon Observations Of Millimetric Extragalactic Radiation ANd Geophysics*, `http://www.physics.ucsb.edu/ boomerang/`

[9] *Millimeter Anisotropy eXperiment IMaging Array*, `http://cosmology.berkeley.edu/group/cmb/`

Podstawy teoretyczne

Najelegantszym sposobem wyprowadzenia równań Einsteina (który sam te równania raczej zgadł niż wyprowadził) jest metoda wariacyjna (najmniejszego działania). Użyta niezależnie przez Hilberta doprowadziła dokładnie do tej samej teorii, przy czym jedne źródła podają, że jeszcze przez Einsteinem, inne — po. Hilbert skonstruował działanie w sposób najprostszy z możliwych w przestrzeni Riemanna, który to sposób zostanie przedstawiony. Do obliczeń dołączymy jednak dodatkowe pole skalarne (zwane powszechnie *kwintesencją* lub *polem X*) — metoda wariacyjna ma bowiem tę przyjemną zaletę, że chcąc uwzględnić element czy oddziaływanie w układzie, wystarczy dodać odpowiadające mu działanie.

2.1 Skalarno-tensorowa teoria grawitacji

Przestrzenią, w której umieszczona jest teoria, jest w ogólności riemannowska rozmaitość różniczkowa z koneksją metryczną. Hilbert szukał w takiej właśnie przestrzeni najprostszej postaci działania (czy też gęstości lagrangianu). Ciąg myślowy, prowadzący do jej konstrukcji, jest następujący:

Działanie tworzymy z gęstości lagrangianu jako:

$$S = \int \mathrm{d}^n x \mathcal{L}, \tag{1}$$

gdzie $\mathcal{L}$ jest gęstością tensorową zerowego rzędu, czyli skalarem mnożonym przez $\sqrt{-g}$, zaś g jest wyznacznikiem z tensora metrycznego. Wiemy jednoczenie, że tensor metryczny może zostać lokalnie sprowadzony do postaci kanonicznej w dowolnym punkcie, tak aby jego pierwsze pochodne znikały. Nietrywialny tensor musi być więc skonstruowany z pochodnych co najmniej 2-go rzędu (których już nie da się odtransformować). Tensorem złożonym z pochodnych do 2-go rzędu włącznie jest tensor Riemanna $R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}$, zaś jedynym niezależnym skalarem z niego skonstruowanym jest skalar Ricciego R, będący zwężeniem poprzedniego. Poza tym każdy nietrywialny tensor złożony z tensora metrycznego i jego pierwszych i drugich pochodnych może być wyrażony poprzez metrykę i tensor Riemanna. Tak więc jedynym niezależnym skalarem utworzonym z tensora metrycznego i jego co najwyżej drugich pochodnych jest właśnie skalar Ricciego. Stąd też ostatecznie gęstość lagrangianu Hilberta przyjmuje postać:

$$\mathcal{L}_H = \sqrt{-g}R. \tag{2}$$

Wariując tak skonstruowane działanie względem metryki można otrzymać równania OTW[10].

W konstrukcji użyte są pochodne tensora metrycznego nie wyższe niż 2-go rzędu. Ma to swoje uzasadnienie, a mianowicie: a) jest to sposób najprostszy i najbardziej „estetyczny", b) gwarantuje dobrze zdefiniowane zagadnienie warunków brzegowych, c) kolejne wyrazy powodowałyby jeszcze gorszą renormalizowalność teorii (grawitacja i tak jest nierenormalizowalna...), d) kolejne wyrazy powinny byłyby być bardzo małe — proporcjonalne do kolejnych potęg masy Plancka m_P. Tak więc powyższy lagrangian wydaje się być w zupełności wystarczający.

Naszym celem jest dołączenie dodatkowego pola skalarnego, minimalnie sprzężonego z grawitacją, co oznacza, że człony zależne od pola ϕ i grawitacji R są łączone wyłącznie przez dodawanie, a nie mnożenie. Nieminimalne sprzężenie występuje między innymi w teorii Bransa-Dicke'a. Dla nas satysfakcjonujące będzie dodanie gęstości postaci

$$\mathcal{L}_X = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - V(\phi)\right), \tag{3}$$

gdzie przez pierwszy człon rozumiemy energię kinetyczną pola, drugi zaś — potencjalną. Przecinki oznaczają pochodne cząstkowe (to znaczy $\phi_{,\nu} = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x^\nu$).

Skonstruowane działanie ma więc postać:

$$S_{ST} = \int \mathrm{d}^n x\sqrt{-g}\Big(R + \beta\big(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - V(\phi)\big)\Big), \tag{4}$$

które należy teraz wariować ze względu na odwrotny (bo tak jest łatwiej) tensor metryczny $g^{\mu\nu}$ oraz pole ϕ. Parametr β określa stopień sprzężenia pola skalarnego i tensorowego. Dość nietrywialne przekształcenia wyrażenia δS_{ST} dają w rezultacie wariację wyrażoną przez elementy zależne od wariacji $\delta g^{\mu\nu}$ oraz $\delta\phi$:

$$\begin{aligned}\delta S_{ST} = \int \mathrm{d}^n x\Big(\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{\beta}{2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{\beta}{4}\phi^{,\lambda}\phi_{,\lambda}g_{\mu\nu} + \frac{\beta}{2}V(\phi)g_{\mu\nu}\Big)\delta g^{\mu\nu} + \\ + \beta\Big(-V'(\phi) - \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu})_{,\nu}\Big)\delta\phi\Big).\end{aligned} \tag{5}$$

$V'(\phi)$ oznacza pierwszą pochodną V względem ϕ. Ponieważ wariacja działania powinna być równa zero niezależnie od wariacji pól, otrzymujemy dwa równania, z których jedno opisuje zachowanie pola tensorowego, drugie — pola skalarnego:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{\beta}{2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{\beta}{4}\phi^{,\lambda}\phi_{,\lambda}g_{\mu\nu} + \frac{\beta}{2}V(\phi)g_{\mu\nu} = 0, \tag{6}$$

$$\sqrt{-g}V'(\phi) + (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu})_{,\nu} = 0. \tag{7}$$

[10] Aby uzyskać równania OTW ze stałą kosmologiczna, wystarczy rozważyć $\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)$

W ten sposób wyprowadziliśmy podstawowe równania zmodyfikowanej OTW w pustej przestrzeni. Pozostaje jedynie dodać człon odpowiedzialny za materię (czyli $T_{\mu\nu}$). Działanie dla materii jest różnie definiowane, zależnie od jej formy — inaczej dla pola elektromagnetycznego, inaczej dla cieczy itp. Najogólniejszą definicję (choć najmniej mówiącą) wprowadzić można następująco:

Wyrażając równanie (6) przez wariację działania otrzymujemy, że lewa strona tegoż równania jest równa $\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$. Natomiast człon, którym należy uzupełnić równanie (6), to $\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$. Tak więc załóżmy, że całkowite działanie jest postaci:

$$S = S_{ST} + \frac{8\pi G}{c^4}S_M. \tag{8}$$

Wariując otrzymujemy:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{\beta}{2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{\beta}{4}\phi^{,\lambda}\phi_{,\lambda}g_{\mu\nu} + \frac{\beta}{2}V(\phi)g_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^4}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \tag{9}$$

Po przyjęciu za definicję działania materii:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}, \tag{10}$$

otrzymujemy dokładnie to, o co nam chodziło, czyli kompletne równania pola.

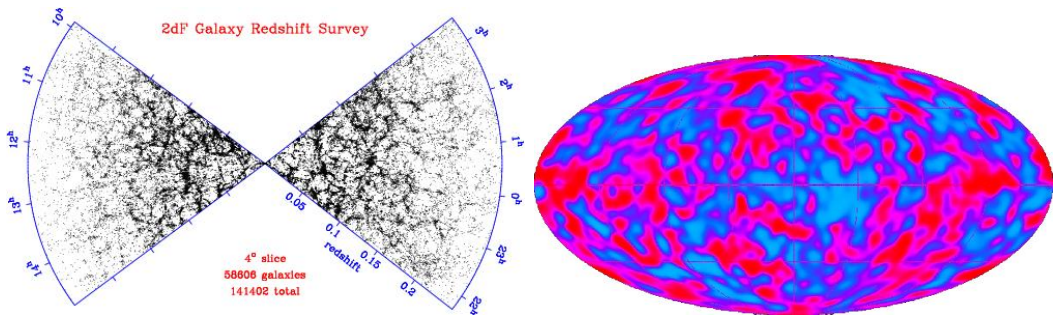
2.2 Jednorodność i izotropia wszechświata — metryka FRW

W poprzednim podrozdziale uzyskaliśmy najogólniejsze równania teorii skalarno-tensorowej. W tej postaci są one do rozważań kosmologicznych właściwie bezużyteczne. Konieczne są odpowiednie założenia co do modelu, które to założenia w znaczący sposób je uproszczą — i pozwolą rozwiązać.

Współczesna kosmologia opiera się na dwóch podstawowych założeniach: mówią one, że Wszechświat jest jednorodny i izotropowy oraz że prawa fizyki są wszędzie jednakowe. Co do drugiego, to raczej nie można wiele dyskutować i musimy przyjąć to założenie, mając na uwadze, że istotnym ograniczeniem będzie dla nas tak zwana *epoka Plancka*, czyli czas, gdy wiek Wszechświat był równy około 10^{-43}s.

Co do jednorodności i izotropii — tu sprawa nie jest tak oczywista, gdyż nasze doświadczenie (na przykład obserwacje ograniczone do kilku sąsiednich galaktyk czy po prostu spojrzenie w nocne niebo) mówi nam, że takie założenie nie może być prawdziwe. Jak się okazuje jednak, na naprawdę dużych skalach Wszechświat jest prawie jednorodny (i izotropowy).

Analiza rozkładu galaktyk do $z = 0.3$ (przesuniecie ku czerwieni) jest dobrą ilustracją jednorodności (patrz rys. 1). Natomiast dużo bardziej przekonujący jest obraz nieba widziany przez satelitę COBE, który badając kosmiczne promieniowanie tła o temperaturze średnio 2.73K, wykrył niejednorodności rzędu zaledwie $\Delta T/T = 10^{-5}$! Znając mechanizm ich powstawania (patrz rozdział 16) oraz fakt, że odzwierciedlają rozkład materii w chwili, gdy



Rysunek 1: Po lewej: przegląd fragmentu nieba wykonany w ramach projektu 2-degree Field Galaxy Redshift Survey — wykazuje jednorodność rozkładu galaktyk na dużych odległościach. Po prawej: rozkład przestrzenny fluktuacji temperatury promieniowania tła wyznaczony przez satelitę COBE w 1990 roku.

Wszechświat liczył sobie około 300 tys. lat, a protony i elektrony zaczęły tworzyć atomy wodoru, możemy w pierwszym przybliżeniu z zupełnie czystym sumieniem założyć jednorodność i izotropię Wszechświata i na tym założeniu stworzyć kosmologiczny model.

Przy obliczeniach powstawania struktur, mając dane rozwiązania dla modelu jednorodnego, używa się metody zaburzeniowej (zlinearyzowane równania OTW) i w ten sposób przechodzi od modelu jednorodnego do modelu ze strukturami. Jest to postępowanie uzasadnione, gdyż zaburzenia zawsze są małe, a liniowe przybliżenie nie może być stosowane tylko do ostatnich faz powstawania gwiazd czy galaktyk, a więc na bardzo małych skalach przestrzennych.

Przestrzenią, którą wykorzystamy do stworzenia modelu, będzie czterowymiarowa czasoprzestrzeń $\mathcal{R} \times \Sigma$. Czas zostaje wydzielony jako niezależna współrzędna, gdyż tak właśnie wygląda dzisiejszy Wszechświat. Niezmienniczość i izotropia dotyczą jedynie podprzestrzeni Σ, która powinna mieć maksymalną możliwą symetrię. Odzwierciedleniem symetrii czasoprzestrzeni będzie niezmienniczość metryki na przesunięcia i obroty w Σ. Metryka jest więc postaci:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \tag{11}$$

gdzie indeksy rzymskie przebiegają liczby $1, 2, 3$, a czynnik $a(t)$ pozwala wydzielić ekspansję przestrzeni (wszechświata) od ruchów własnych obiektów. Aż do odwołania będziemy mierzyć czas w jednostach odległości, aby pomijać czynnik c. Poprzez nałożenie warunku maksymalnej symetrii (a więc sferycznej) na elementy tensora γ_{ij}, analiza, której szkic odnaleźć można w Carroll (1997), prowadzi do następującej formy metryki:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)\right). \tag{12}$$

Jest ona rzeczywiście niezmiennicza na przesunięcia i obroty w części przestrzennej, jest jednocześnie najprostszą metryką spełniającą nałożone powyżej warunki.

Wyjaśniając symbole użyte w metryce: $\{r,\ \theta,\ \varphi\}$ są tak zwanymi współrzędnymi współpo-

ruszającymi — ruch punktów o ustalonych współrzędnych wynika wyłącznie z rozszerzania się przestrzeni. Związek pomiędzy współrzędnymi współporuszającymi $\mathbf{r}$ a współrzędnymi rzeczywistymi (fizycznymi) $\mathbf{x}$ jest (przy ustaleniu początku układu współrzędnych) następujący:

$$\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{r}, \tag{13}$$

$$\big(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\big) = a(t)\big(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\big). \tag{14}$$

Widać więc, że odległości fizyczne we Wszechświecie pomiędzy punktami o ustalonych współrzędnych współporuszających są proporcjonalne do czynnika skali $a(t)$ (i tak też zmieniają się w czasie), który określa zależną jedynie od czasu dynamikę Wszechświata. Czynnik ten związany jest z przesunięciem ku czerwieni z poprzez

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z} = \frac{\lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{obs}}}, \tag{15}$$

co oznacza, że w momencie wyemitowania sygnału świetlnego przez obiekt o danym poczerwienieniu, czynnik skali był równy a. Wyrażenie powyższe określa również stosunek długości fali emitowanej przez obiekt do długości fali obserwowanej przez nas. Najczęściej przyjmuje się, że dzisiejszy czynnik skali jest równy $a_0 = a(t_0) = 1$.

Wskaźnik k oznacza zakrzywienie samej przestrzeni. Dla $k = 0$ przestrzeń jest euklidesowa — metrykę można zapisać po prostu jako $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right)$, co przy przejściu do współrzędnych fizycznych daje dokładnie metrykę Minkowskiego. Przyjęcie $k > 0$ oznacza dodatnią krzywiznę, czyli wszechświat zamknięty, zaś $k < 0$ — krzywiznę ujemną i wszechświat otwarty.

Podstawienie $r = \chi$, $r = \sin\chi$, $r = \sinh\chi$ daje w trzech wymienionych przypadkach następujące postaci metryki na Σ (dla $k = 0$, $k = 1$, $k = -1$)[11] :

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}\chi^2 + \chi^2\mathrm{d}\Omega^2,$$

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\mathrm{d}\Omega^2, \tag{16}$$

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi\mathrm{d}\Omega^2.$$

Metryki te opisują odpowiednio płaszczyznę, 3-sferę oraz trójwymiarową powierzchnię hiperboliczną (którą lokalnie można odwzorować jako powierzchnię siodłową). Stąd nazwy:

[11] metryka FRW jest niezmiennicza ze względu na na transformację:

$$k' = \frac{k}{|k|}, r' = \sqrt{|k|}r,\ a' = \frac{a}{\sqrt{|k|}},$$

co pozwala na sprowadzenie każdego przypadku $k \neq 0$ do $k = \pm 1$.

wszechświat płaski, zamknięty i otwarty. W tym miejscu dygresja: wszechświat zamknięty ma skończoną objętość, natomiast (wbrew intuicji) płaski i otwarty wcale nie muszą być nieskończone. Przypadek $k = 0$ może bowiem opisywać choćby 3-torus, a więc obiekt o skończonej objętości. Istnieją także skończone konstrukcje topologiczne o ujemnej krzywiźnie.

Ważne jest to, że dzięki tak skonstruowanej metryce, zwanej metryką Friedmanna-Robertsona-Walkera, możemy znaleźć wszystkie rozwiązania dla jednorodnego i izotropowego wszechświata. A więc w ciągu kilku minut (godzin), w sposób ścisły matematycznie dokonać tego, co zajęło współczesnym Einsteinowi kilka lat — kompletne rozwiązania zostały opublikowane w 1924 roku przez Friedmanna (rok przed jego śmiercią), 9 lat po powstaniu OTW. Spór wokół sensowności znajdywanych kolejno rozwiązań OTW tworzy fascynującą historię, w której niestety większą rolę niż argumentacja matematyczna odegrały osobiste przekonania, choćby samego Einsteina, odrzucającego aż do 1930 roku wszelkie niestatyczne rozwiązania swojej teorii. Sam Friedmann (i jego dokonania) nie został za życia doceniony, a jego prace nie wzbudziły odzewu. Na dorobek Friedmanna zwrócono uwagę dopiero po jego śmierci, głównie za sprawą publikacji Lemaître'a i Robertsona.

2.3 Równania Friedmanna

Wracając jednak do modelu — aby otrzymać równania kosmologii, należy podstawić otrzymaną formę metryki z równania (12) do równań Einsteina. Tu zrobimy to dla teorii skalarno-tensorowej, otrzymując ogólną postać równań. Pozwolę sobie przedstawić dość szczegółowy zarys wyprowadzenia, gdyż nigdzie w literaturze nie spotkałem podobnego podejścia — autorzy przytaczają zwykle jedynie końcowe 3 równania. Zrozumienie jednakże ich pochodzenia jest według mnie kluczowe do zrozumienia istoty kosmologii (friedmannowskiej).

Równania skalarno-tensorowej teorii grawitacji, jak już wcześniej pokazaliśmy, mają postać:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \frac{\beta}{2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{\beta}{4}\phi^{,\lambda}\phi_{,\lambda}g_{\mu\nu} + \frac{\beta}{2}V(\phi)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{17}$$

$$\sqrt{-g}V'(\phi) + (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu})_{,\nu} = 0, \tag{18}$$

gdzie $T_{\mu\nu}$ jest tensorem energii-pędu dla materii (energii), $\kappa = 8\pi G/c^4$ — stałą proporcjonalności wyznaczoną z przybliżenia słabego pola.

W pierwszej kolejności określimy postać tensora $T_{\mu\nu}$, wprowadzimy tensor energii-pędu dla pola ϕ, a następnie podstawimy do powyższych równań metrykę FRW.

Tensor energii-pędu dla materii i promieniowania

Ogólna postać tensora idealnej cieczy w teorii OTW to:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}, \tag{19}$$

ρ i p to odpowiednio gęstość i ciśnienie materii w układzie spoczynku tejże, u_μ to czterowektor prędkości. Z założenia o izotropii modelu wnioskujemy, że ciecz (materia) musi pozostawać w spoczynku we współrzędnych współporuszających, tzn:

$$u_\mu = (1, 0, 0, 0). \tag{20}$$

Wówczas tensor energii-pędu przyjmuje postać:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -pg_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{21}$$

przy czym równania stanu należy zadać z zewnątrz, najprościej postaci $p = w\rho$. Zakłada się wówczas, że równanie stanu dla materii (pyłu) to $p_m = 0$ — ciśnienie na przykład gazu atomowego jest relatywistycznie zaniedbywalne, dla promieniowania zaś $p_r = 1/3\rho_r$, co wynika ze skwantowania pola elektromagnetycznego. Równanie stanu determinuje nie tylko ewolucję czasową samego składnika, ale także jego wpływ na ekspansję globalną.

Przed dalszymi rozważaniami rozpatrzmy jeszcze zerową składową zasady zachowania dla tensora energii-pędu, czyli zerowania czterodywergencji $T^\mu{}_{\nu;\mu}$, gdzie $T^\mu{}_\nu = \mathrm{diag}(\rho, -p, -p, -p)$. Po krótkich obliczeniach otrzymujemy równanie ewolucji materii w czasie:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho\,(1 + w)\,, \tag{22}$$

które można rozwiązać dla różnych jej form. W ogólności rozwiązanie ma postać:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \tag{23}$$

co dla pyłu daje $\rho_m \propto a^{-3}$, czyli jest dość intuicyjne, bo gęstość cząstek maleje proporcjonalnie do odwrotności rozmiarów objętościowych. Natomiast dla promieniowania otrzymujemy $\rho_r \propto a^{-4}$. Dodatkowa zmiana gęstości energii jest spowodowana zmianą energii cząstek (fotonów) zgodnie z $E = hc/\lambda$, jako że długości fal zwiększają się w wyniku ekspansji samej przestrzeni. Tym mechanizmem tłumaczony jest kosmologiczny *redshift* obiektów astronomicznych — fotony ulegają poczerwienieniu w wyniku rozszerzania się przestrzeni.

Tensor energii-pędu dla pola skalarnego

Aby pozbyć się dość nieprzyjemnych wyrazów w (17), pochodzących od pola skalarnego, rozważmy możliwość utworzenia z nich tensora energii-pędu. Tensor ten miałby postać analogiczną do (21), jak za chwilę zobaczymy. Istotą pola kwintesencji jest to, że w części przestrzennej jest ono jednorodne (i izotropowe), stąd znikają wszystkie przestrzenne pochodne pola.

Jak można łatwo sprawdzić, tensor energii-pędu należy zbudować postaci:

$$T_{\mu\nu} = \left(-\frac{\beta}{2\kappa}\right) \begin{pmatrix} \dot{\phi}^2/2 + V(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -\left(\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)\right) g_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Teraz zaś, przyjmując $\beta = -2\kappa$, możemy utożsamić gęstość energii pola i jego ciśnienie z:

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \tag{25}$$

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \tag{26}$$

Aby uzasadnić prawdziwość (czy raczej możliwość) takiego postępowania, rozważmy, podobnie jak poprzednio, zerową składową równania zachowania dla tensora (24). Sprowadzi się ona do

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \tag{27}$$

czyli równania ewolucji pola, tożsamego z równaniem (18) — po nałożeniu na pole warunku jednorodności przestrzennej! Od tej pory traktować będziemy przejawy pola na równi z promieniowaniem i materią, używając dla nich wszystkich jednego tensora.

Zabieg, który wykonaliśmy, pozwoli nie wlec za sobą części skalarnej równań, a przede wszystkim pozwala stworzyć interpretację pola.

W tym miejscu zauważmy, że wprowadzone przez nas pole jest najprostszym uogólnieniem stałej kosmologicznej. Tak samo dla Λ moglibyśmy stworzyć podobny tensor i interpretować jego elementy jako energię (próżni) i ciśnienie (też, o dziwo, próżni), dla których równanie stanu miałoby postać $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$. Pole ϕ ściśle imituje stałą kosmologiczna, gdy $\dot{\phi} = 0$ i $V(\phi) \neq 0$.

Równania Friedmanna

Wyprowadzenie równań Friedmanna to po prostu wyliczenie (niestety nieco żmudne, dobrze jest użyć programu typu *Mathematica*) współczynników koneksji metrycznej, tensora Ricciego i wstawienie do równania (17). Ponieważ oprócz zawiłości technicznych[12] procedura nie zawiera elementów koniecznych do zrozumienia istoty równań, pozwolę sobie przytoczyć jedynie końcowy rezultat.

Ze względu na założoną symetrię przestrzenną problemu, z równań (17) otrzymujemy tylko

[12] szczegóły znaleźć można m.in. w Carroll (1997)

dwa niezależne równania, które po kosmetycznych manipulacjach przyjmują postać:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \tag{28}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \tag{29}$$

zaskakująco prostą w porównaniu z wejściowymi równaniami teorii skalarno-tensorowej (z jednostkami czasu przeszliśmy do sekund[13], aby być bliżej istniejącej literatury). Do tego dochodzi równanie ewolucji pola (27). Rozwiązując je, otrzymujemy opis globalnej ekspansji wszechświata, wyrażony przez $a(t)$.

W kosmologii wprowadza się dodatkowe parametry, ułatwiające opis modelu. I tak, w oparciu o równania (28) i (29), definiujemy *parametr Hubble'a* jako:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{30}$$

Taka definicja jest, dla małych odległości, zgodna z prawem Hubble'a o liniowej zależność prędkości ucieczki od odległości. Na dużych (kosmologicznych) odległościach nie jest ono słuszne.

Definiuje się także *gęstość krytyczną wszechświata* jako gęstość, przy której wszechświat jest płaski (tzn. $k = 0$). Wprost z równania (28), kładąc $k = 0$, otrzymujemy:

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{31}$$

Jest ona również funkcją czasu. Jeśli (całkowita) gęstość wszechświata jest równa gęstości krytycznej, krzywizna przestrzeni jest zerowa. Nadmiar (niedomiar) materii powoduje zwiększenie (zmniejszenie) krzywizny.

Aby jeszcze uprościć równania Friedmanna, z krzywizną można stowarzyszyć gęstość energii krzywizny jako

$$\rho_k(a) = -\frac{3c^2}{8\pi G}\frac{1}{a^2}k \tag{32}$$

o równaniu stanu

$$p_k = -\frac{1}{3}\rho_k. \tag{33}$$

W ten sposób pozbywamy się członu krzywizny w równaniu (28), pozostawiając niezmienione (29).

Dla wszystkich form energii możemy wyznaczyć ekspansję $a(t)$, gdy dana forma dominuje. Podsumowanie znajduje się w tabeli 1. Istotne jest, że materia i promieniowanie spowalniają ekspansję (zależność potęgowa), podczas gdy stała kosmologiczna (i pole skalarne w większości wypadków) ją napędza.

[13] należy pamiętać, aby jednocześnie przeskalować potencjał pola użyty wcześniej do: $V(\phi) \to V(\phi)/c^2$

rodzaj energii	r-nie stanu	ewolucja	rodzaj ekspansji gdy dominuje
promieniowanie	$p_r = 1/4\rho_r$	$\rho_r \propto a^{-4}$	$a \propto t^{1/2}$
materia	$p_m = 0$	$\rho_m \propto a^{-3}$	$a \propto t^{2/3}$
stała kosmologiczna	$p_\Lambda = -\rho_\Lambda$	$\rho_\Lambda = const$	$a \propto \exp(H_0 t)$
krzywizna	$p_k = -1/3\rho_k$	$\rho_k \propto a^{-2}$	$a \propto t$
pole skalarne	nietrywialne	nietrywialna	nietrywialna

Tabela 1: Różne formy energii i ich własności.

Możemy teraz wprowadzić *bezwymiarowe parametry gęstości* dla wszystkich rodzajów energii, jako stosunek ich gęstości do gęstości krytycznej:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{cr}}, \tag{34}$$

bezwymiarowa gęstość całkowita to:

$$\Omega = \sum_i \Omega_i = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_\phi + \text{wszystkie inne formy energii poza } \Omega_k, \tag{35}$$

zaś:

$$\Omega_k = 1 - \Omega. \tag{36}$$

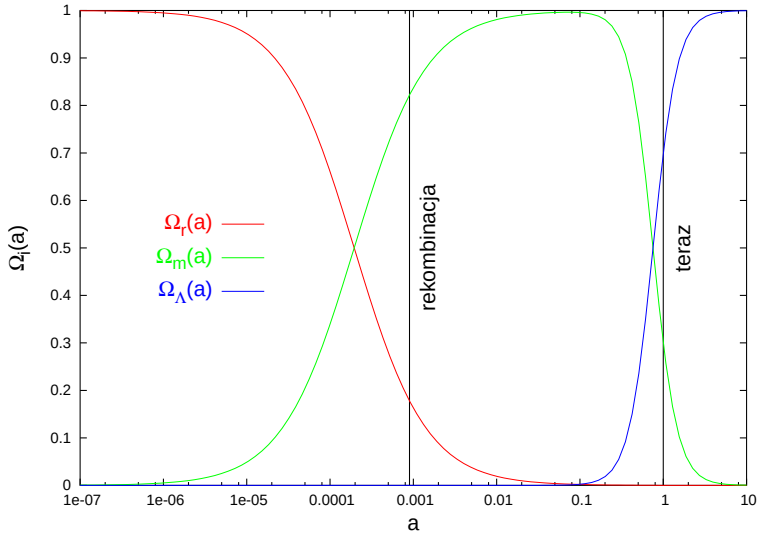
Wszystkie parametry z subskryptem „0” dotyczą wartości obecnej.

2.4 Kwintesencja — historia wszechświata a dynamika pola

Jak widzieliśmy w poprzednim podrozdziale, różne formy energii mają różny wpływ na dynamikę ekspansji wszechświata. Ich ewolucja w czasie również jest różna, przez co historię wszechświata można podzielić na kilka etapów w zależności od dominującego składnika: erę dominacji promieniowania, materii i stałej kosmologicznej (kwintesencji). Zostało to przedstawione na rysunku 2. Tak się dziwnie składa, że żyjemy na pograniczu dwóch ostatnich epok, na co wskazują różne obserwacje.

$\rho > \rho_{cr}$	$\Omega > 1$	$\Omega_k < 0$	krzywizna dodatnia, skończona objętość
$\rho = \rho_{cr}$	$\Omega = 1$	$\Omega_k = 0$	krzywizna zerowa, skończona lub nieskończona objętość
$\rho < \rho_{cr}$	$\Omega < 1$	$\Omega_k > 0$	krzywizna ujemna, skończona lub nieskończona objętość

Tabela 2: Związek pomiędzy całkowitą gęstością wszechświata a krzywizną i objętością



Rysunek 2: Przykład ewolucji bezwymiarowych parametrów gęstości dla płaskiego wszechświata ze stałą kosmologiczną. Podział na epoki następuje w zależności od dominującego składnika, od lewej: promieniowanie, materia, stała kosmologiczna. Λ może być zastąpiona polem skalarnym — praktycznie nie zmienia to rysunku. W każdej z epok składnik dominujący decyduje o charakterze ekspansji.

Rozważmy teraz konkretną postać potencjału dla pola[14]:

$$V(\phi) = \beta\phi^{-\alpha}. \tag{37}$$

Korzystając z wyprowadzonych wcześniej równań, możemy wyznaczyć zarówno ewolucję pola ϕ, jak i dynamikę czynnika skali $a(t)$. Okazuje się, że przy odpowiednio dobranych parametrach α i β uzyskamy dzisiejszy obraz Wszechświata, z tym że zamiast stałej kosmologicznej występować będzie pole skalarne ją imitujące. Dla potencjału (37) i parametrów $\alpha = -1$ i $\beta = 1.1 \times 10^{-22}$, zakładając $\Omega_{m0} = 0.3$ i dzisiejszą stałą Hubble'a na poziomie $H_0 = 60$km/s/Mpc, otrzymamy $\Omega_{X0} = 0.7$, i wiek Wszechświata równy 15 mld lat. Wyniki przedstawione są na rysunku 3.

Zwróćmy jeszcze uwagę na charakter ewolucji pola ϕ. Równanie (27) jest *de facto* równaniem oscylatora z członem tłumiącym $3H$ i potencjałem V. Można by przeprowadzić dokładną analizę rozwiązań tegoż, tutaj jednak zwróćmy uwagę na kilka ciekawych faktów. Ewolucja rozpoczyna się w pobliżu $\phi \approx 0$, by potem pole toczyło się po ścianie potencjału w dół. Może się zdarzyć, co widać na rysunku 3a lub 4, że na skutek czynnika tłumiącego pole zostanie zamrożone. Wtedy zachowuje się jak stała kosmologiczna. Stan taki nie musi być ostatecznym — stała Hubble'a zmienia się z czasem (maleje), więc pole kontynuuje ewolucję. Nie jest to

[14] Potencjał taki jest często rozważany w pracach poświęconych kwintesencji. Ma on tę przyjemną zaletę, że dla $\phi \to \infty$ staje się niemal płaski, przez co pole ewoluuje coraz wolniej lub zastyga — wtedy imituje zachowaniem stałą kosmologiczną.

jednak regułą i w dużym stopniu zależy od kształtu potencjału. W przypadku, gdy dziś pole ewoluuje zamiast pozostawać stałym, weryfikacja teorii powinna być dużo prostsza.

Tak zdefiniowane pole skalarne ma jeszcze jedną przewagę nad stałą kosmologiczną, o której to przewadze już wcześniej wspomniałem. Otóż dla ustalonego potencjału otrzymujemy dzisiejsze wartości parametrów kosmologicznych dla różnych wartości początkowych pola — porównaj rysunek 4.

Aby ułatwić obliczenia, w dalszej części pracy będę stosował przybliżoną ewolucję pola poprzez aproksymację równania stanu:

$$p_\phi = w(a)\rho_\phi \approx \left(\sum_{i=0}^{n} w_i (a-1)^i\right)\rho_\phi, \tag{38}$$

czyli rozwijając czynnik w na szereg Taylora (aż do n-tego wyrazu) w pobliżu $a = a_0 = 1$, co przyjmiemy za chwilę obecną. Później ograniczymy się do kilku początkowych wyrazów, na razie nie zmniejszajmy ogólności.

Dla takiego rozwinięcia równania stanu spróbujmy znaleźć zależność od czynnika skali $\rho_\phi(a)$. W tym celu wystarczy podstawić (38) do (22), posortować wyrazy i wycałkować. Dość skomplikowane rachunki prowadzą do ogólnego wyrażenia postaci:

$$\rho_\phi = \rho_{\phi 0} a^{-3\left(1+\sum_{i=0}^{n}(-1)^i w_i\right)} \exp\left(3\sum_{k=1}^{n}\left(1-a^k\right)\frac{1}{k}\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}w_i\right). \tag{39}$$

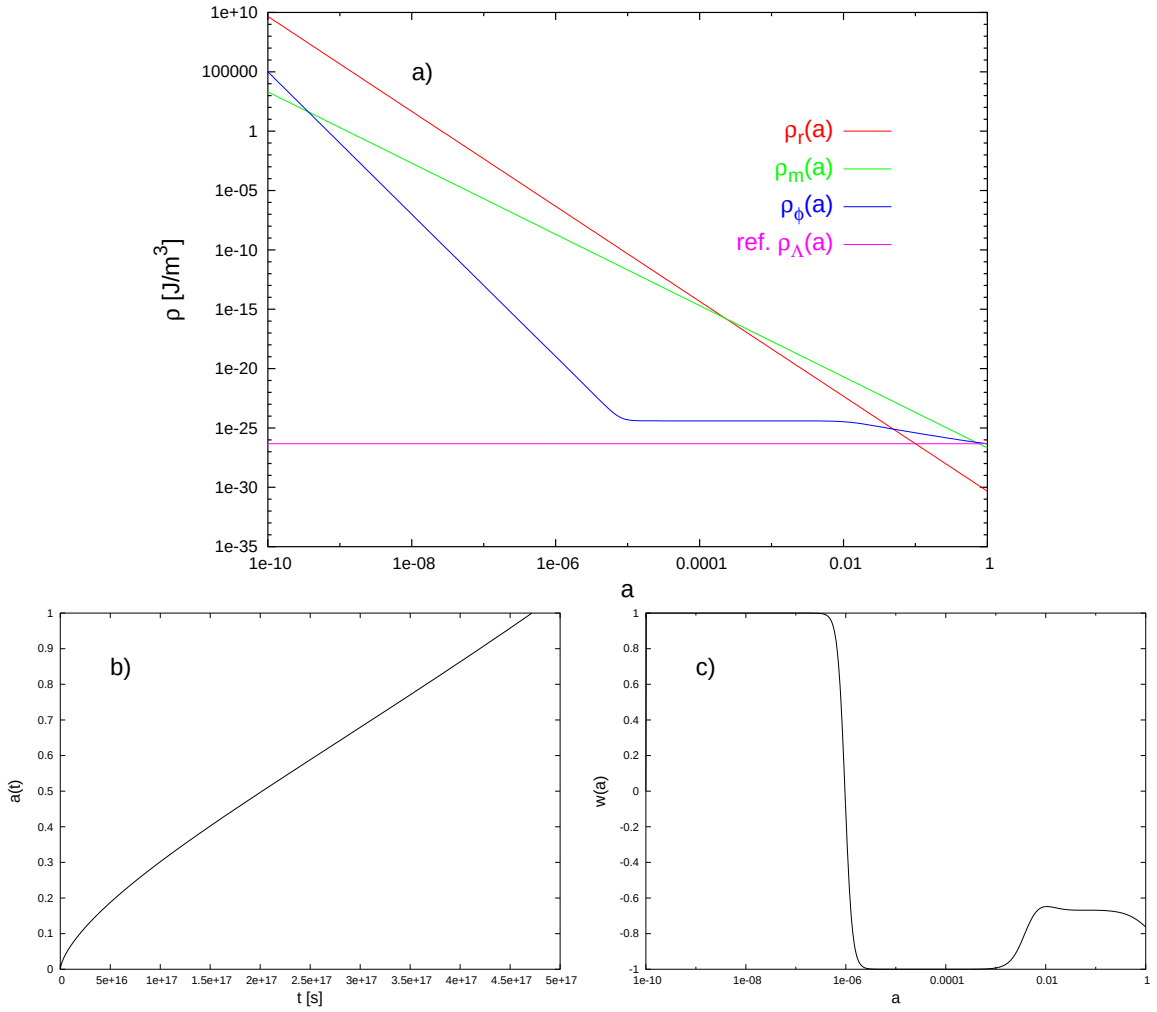
W literaturze (głównie przy analizie obserwacji) często rozważa się jedynie równanie stanu kwintesencji $p_X = w_0\rho_X$, a więc o stałym współczynniku w. Jest to oczywiście najprostsze uogólnienie pojęcia stałej kosmologicznej i łatwe w obliczeniach numerycznych.

Na potrzeby tej pracy sensowne wydaje się ograniczenie do $n = 1$. Jest to uzasadnione z kilku powodów:

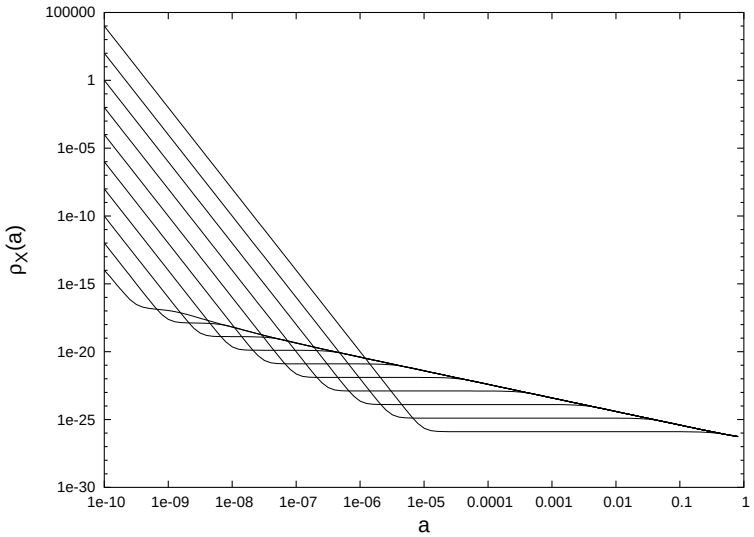
1. rozważanie całej dynamiki pola prowadziłoby do dużo większej złożoności obliczeniowej, co przekładałoby się na czas obliczeń — na przykład kwestia zależności warunków początkowych pola od gęstości kwintesencji obserwowanej dzisiaj i degeneracja ze względu na warunki początkowe;

2. w ten sposób do modelu dokładamy tylko dwa dodatkowe parametry (w porównaniu z modelem ze stałą kosmologiczną) — w przypadku dynamicznego pola dochodziłyby warunki początkowe pola (2 parametry) + parametry potencjału $V(\phi)$, a kolejne wymiary przestrzeni parametrów to komplikacja strony numerycznej;

3. jako że wpływ pola kwintesencji na wszechświat jest znaczący dopiero od „niedawna", nie musimy aż tak troszczyć się o przesunięcia ku czerwieni rzędu $z = 1000$ — wtedy udział pola w całkowitej gęstości był znikomy, więc możemy sobie pozwolić na nieco większe odchylenia od ścisłej ewolucji;



Rysunek 3: Na rysunku a) przedstawiono ewolucje gęstości poszczególnych składników w funkcji czynnika skali. Gęstość stałej kosmologicznej podano tylko dla porównania — nie była ona obecna w obliczeniach. Rysunek b) przedstawia zmiany samego czynnika skali w zależności od czasu. Ewolucja parametru w określającego równanie stanu pola skalarnego znajduje się na rysunku c).



Rysunek 4: Dzisiejsze parametry kosmologiczne są praktycznie niewrażliwe na początkową wartość energii pola skalarnego! Dla różnych przypadków otrzymujemy identyczny wiek wszechświata i obecną wartość energii pola skalarnego.

4. dla potencjału $V(\phi) = \beta\phi^{-\alpha}$ zgodność z dokładną ewolucją jest bardzo dobra aż do $z = 4$ — por. rys. 5.

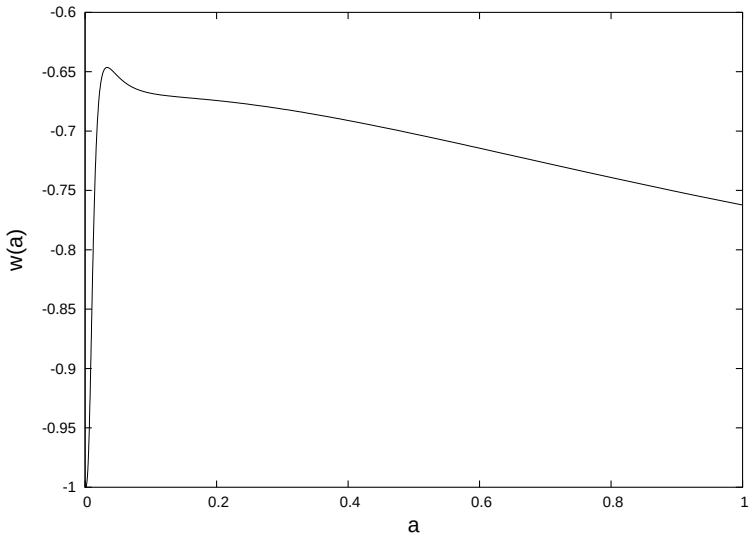
Do analizy danych supernowych typu Ia przybliżenie powyższe jest w zupełności wystarczające. Zastosujemy je także przy generowaniu rozkładu anizotropii promieniowania tła, musimy tylko mieć na uwadze, aby gęstość pola była mała w czasie rekombinacji i wcześniej — w przeciwnym razie otrzymalibyśmy błędne rezultaty.

Tak więc ostatecznie otrzymujemy:

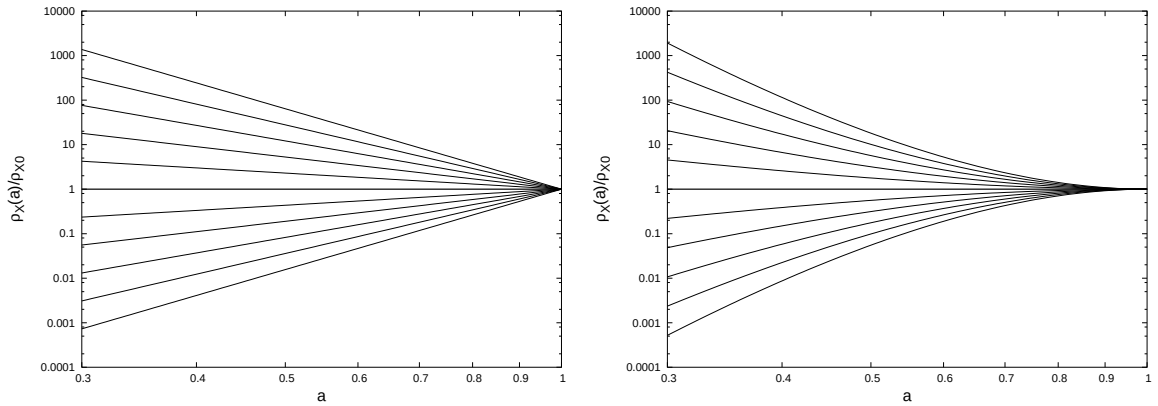
$$p_X = (w_0 + w_1(a-1))\,\rho_X, \tag{40}$$

$$\rho_X = \rho_{X0} a^{-3(1+w_0-w_1)} \exp\left(3w_1(1-a)\right). \tag{41}$$

Przybliżoną ewolucję gęstości związaną z polem przedstawia rysunek 6.



Rysunek 5: Zmiana czynnika w, podobnie jak na rysunku 3c, lecz tym razem skala pozioma nie jest skalą logarytmiczną. Widać, że wykorzystanie przybliżenia (40) jest jak najbardziej uzasadnione!



Rysunek 6: Wyrażenie (41) w funkcji czynnika skali a. Po lewej stronie $w_1 = 0$, zaś w_0 zmienia się od 1 (na górze) do -3 (na dole). Po prawej $w_0 = -1$, a w_1 przebiega wartości od -5 (na górze) do 5 (na dole). Widoczna jest różnica w ewolucji spowodowana czynnikiem $\exp(3w_1(1-a))$.

Możliwości obserwacyjne

3.1 Pomiary blasku supernowych typu Ia

Supernowe typu Ia są bardzo wdzięcznymi obiektami do obserwacji kosmologicznych. Po kalibracji (jasność absolutna i szerokość połówkowa krzywej blasku są w pierwszym przybliżeniu związane liniową zależnością) każdy wybuchający obiekt tego typu może być traktowany jako „standardowa świeca" — o jednakowej jasności absolutnej.

Niestety nie posiadamy dobrego modelu gwiazd typu Ia, nie znamy nawet dokładnie scenariusza wybuchu — przystępny przegląd można zaleźć w Niemeyer (2002). Fenomenologiczny związek pomiędzy jasnością absolutną a profilem jasności pochodzi z obserwacji najbliższych tego typu obiektów, dla których możemy określić odległość (poprawki kosmologiczne są zaniedbywalne).

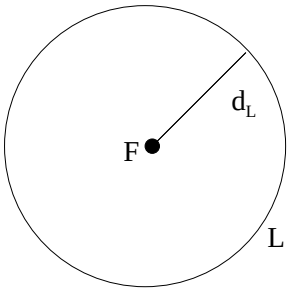
Definiując *odległość jasnościową* obiektu jako

$$d_L = \sqrt{\frac{4\pi L}{F}}, \tag{42}$$

gdzie L to moc promieniowania obiektu, zaś F to obserwowany strumień energii, widzimy że jest to odległość, jaka dzieliłaby nas od świecącego obiektu w płaskim i statycznym wszechświecie. Stąd też jej związek z jasnością absolutną obiektu i obserwowaną:

$$m_{obs} = m_{abs} + 5\log_{10} d_L. \tag{43}$$

Okaże się, że relacja między d_L a poczerwienieniem kosmologicznym z zależy od parametrów kosmologicznych, występujących w równaniach Friedmanna. Chcąc zależność tę znaleźć, musimy wyznaczyć odległość od obiektu we współrzędnych współporuszających, a następnie przetransformować ją do współrzędnych fizycznych. Zarys metody można znaleźć na przykład w Goobar & Perlmutter (1995), choć używane tam wzory są przybliżone[15].



Niech r będzie odległością od obiektu we współrzędnych współporuszających. Pierwszym krokiem będzie wyrażenie tejże odległości przez poczerwienienie. Równanie elementu linio-

[15] Zespół SCP z nieznanych powodów zawsze używa w publikacjach wzorów przybliżonych na d_L, które w żaden sposób nie wpływają na łatwość ani szybkość obliczeń.

wego dla fotonów przyjmuje postać:

$$c\mathrm{d}t = a(t)\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{44}$$

Chcąc wyznaczyć r, zauważmy, że różniczkę $\mathrm{d}t$ możemy zastąpić przez $\mathrm{d}a/\dot{a} = \mathrm{d}a/(aH(a))$. Zaś ewolucja stałej Hubble'a jest trywialna, o ile znamy ewolucje gęstości wszystkich form energii (w zależności od a) — patrz tabela 1. Z kwintesencją uporaliśmy się w poprzednim rozdziale, dokonując przybliżenia (41). Jeśli dodatkowo zastąpimy różniczkę $\mathrm{d}a = -\mathrm{d}z/(1+z)$ oraz samo $a/a_0 = 1/(1+z)$ i wykonamy całkowanie, otrzymamy:

$$\int_0^r \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_a^{a_0} \frac{c\mathrm{d}a}{H(a)a^2} = \int_0^z \frac{c\mathrm{d}z}{H(z)}. \tag{45}$$

Całkę po lewej stronie równania łatwo wykonać, gdy $k = \pm 1$. Po podstawieniu $r \to r/\sqrt{|k|}$ mamy

$$r = \frac{1}{\sqrt{|k|}} S_k\left(\sqrt{|k|}\int_0^z \frac{c\mathrm{d}z}{H(z)}\right), \tag{46}$$

gdzie przyjmujemy definicję S_k:

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{gdy} \quad k > 0, \\ x & \text{gdy} \quad k = 0, \\ \sinh(x) & \text{gdy} \quad k < 0. \end{cases} \tag{47}$$

Odległość jasnościową dostaniemy przez pomnożenie tak uzyskanej odległości przez a_0/a, czyli $d_L = (1+z)r$. Najbardziej przydatna (i kompletna) postać wyrażenia to:

$$\begin{aligned} d_L = \frac{1+z}{H_0\sqrt{|\Omega_{k0}|}} S_k\Bigg(\sqrt{|\Omega_{k0}|}\int_0^z \mathrm{d}z \Big[\Omega_{r0}(z+1)^4 + \Omega_{m0}(z+1)^3 + \Omega_{k0}(z+1)^2 + \\ + \Omega_{X0}(z+1)^{3(1+w_0-w_1)} \exp\left(3w_1 z/(z+1)\right)\Big]^{-\frac{1}{2}}\Bigg), \end{aligned} \tag{48}$$

choć w dalszych obliczeniach będziemy zaniedbywali wartość Ω_{r0} — w zakresie występowania supernowych jest ona znikomo mała.

Jeśli teraz zdefiniujemy wielkość $D_L = d_L H_0$ (co pozwoli pozbyć się zależności do stałej Hubble'a) i uwzględnimy różne inne obserwacyjne efekty (Perlmutter et al., 1999), uzyskamy *jasnością efektywną*, wszystkie zaś niechciane czynniki (łącznie z H_0) zostają „zepchnięte" do stałej M:

$$m_{eff} = M + 5\log_{10} D_L \tag{49}$$

Dzięki powyższym równaniom otrzymujemy zależność jasność (efektywna) – poczerwienienie, parametryzowaną przez model kosmologiczny, która pozwoli wyznaczyć parametry modelu. Zbiór danych (oczywiście nie surowych), udostępniony przez zespół *Supernova Cosmology Project*, zawiera właśnie jasności efektywne, poczerwienienia oraz związane z tymi

wielkościami błędy.

3.2 Anizotropia kosmicznego promieniowania tła (CMB)

Kosmiczne promieniowanie tła (*Cosmic Microwave Background*) ukazuje obraz Wszechświata, gdy jego wiek (licząc do Wielkiego Wybuchu) wynosił zaledwie 300 000 lat.

Jako że pomiary CMB stały się ostatnio niezwykle „modne" (jeśli to określenie może odnosić się do nauki), w internecie i prasie astronomicznej można znaleźć wiele popularnych wprowadzeń czy naukowych opracowań fizyki odpowiedzialnej za powstawanie tegoż promieniowania i jego fluktuacji. Pozwolę sobie jednak na krótkie wyjaśnienie i naszkicowanie problematyki.

Geneza promieniowania tła

Obecnie wiemy, że nasz Wszechświat jest prawie jednorodnie wypełniony promieniowaniem fotonowym o niemal idealnym widmie ciała doskonale czarnego i temperaturze 2.73K.

Od chwili Wielkiego Wybuchu Wszechświat rozszerza się i jednocześnie średnia energia przypadająca na jedną cząstkę maleje. Przy wysokiej temperaturze wodór (podstawowy składnik materii) pozostawał całkowicie zjonizowany w równowadze termodynamicznej z fotonami, których średnia droga swobodna była bardzo krótka ze względu na rozpraszanie na swobodnych elektronach. Rozkład energetyczny fotonów to równowagowy rozkład Plancka:

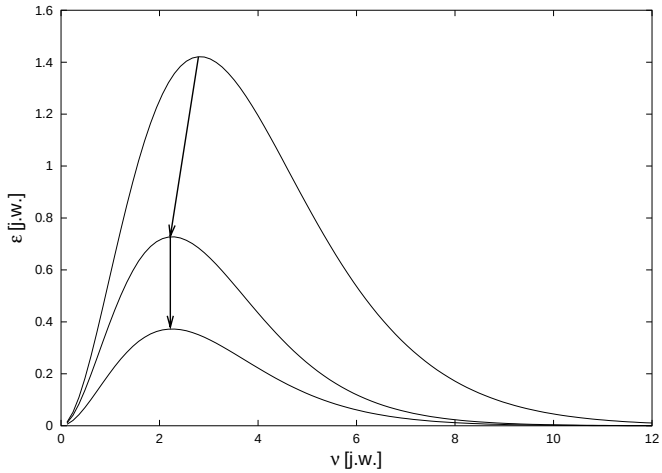
$$\varepsilon(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi}{c^3}\frac{\nu^3\mathrm{d}\nu}{\exp(h\nu/k_BT)-1}. \tag{50}$$

Przy temperaturze $T \approx 4000$K gęstość fotonów o energii większej niż energia jonizacji wodoru (13.6eV) staje się równa gęstości barionów[16] (głównie wodoru), tak więc protony i elektrony mają szansę tworzyć atomy wodoru. Zjawisko to zwane jest nieco mylnie *rekombinacją*, co sugeruje, że jest to proces powtórny. Oczywiście tak nie jest, a nazwa pochodzi z terminologii fizycznej związanej raczej z warunkami laboratoryjnymi.

Podczas rekombinacji gęstość swobodnych elektronów gwałtownie maleje i średnia droga swobodna fotonów staje się większa niż promień Hubble'a (czyli c/H_0), co w praktyce oznacza brak rozpraszania. Przy temperaturze $T \approx 3000$K, odpowiadającej przesunięciu ku czerwieni $z \approx 1100$, fotony stają się swobodne, a Wszechświat praktycznie dla nich przezroczysty.

Fotony przed rekombinacją spełniały rozkład Plancka (równowaga termodynamiczna). Można pokazać, że rozkład ten jest podczas ekspansji zachowany: mianownik wyrażenia (50) zależy od stosunku ν/T. Częstotliwość ν pojedynczego fotonu maleje proporcjonalnie do $1/a$ — tak więc zmniejszenie częstotliwości można zrekompensować zmniejszeniem temperatury $T_1/T_2 = a_2/a_1$. Zaś ν^3 zmniejsza się proporcjonalnie do zmniejszania gęstość fotonów na

[16] w kosmologii pod pojęciem „bariony" rozumie się leptony i zbudowane z kwarków hardony, a nie trójkwarkowe hadrony, jak w fizyce



Rysunek 7: Zmiana widma CMB pod wpływem ekspansji wszechświata dla $a_2 = 1.25a_1$. Pierwsze przejście odpowiada zmianie wyłącznie pod wpływem obniżenia temperatury $T_2 = 0.8T_1$. Drugie — zmniejszeniu ilości fotonów na jednostkę objętości ($n_{\gamma 2} = (1.25)^3 n_{\gamma 1}$). Pod wpływem zmian kształt rozkładu zostaje zachowany.

jednostkę objętości — a więc powstający tu czynnik a^{-3} odpowiada za rozrzedzenie fotonów w wyniku ekspansji. Zachowanie widma ilustruje poglądowy rysunek 7.

Pomiary CMB wykonane przez COBE (Mather et al., 1994) dały bardzo silne potwierdzenie teorii Wielkiego Wybuchu poprzez dokładny pomiar widma CMB. A raczej pokazały, że nasz model Wszechświata jest spójny i zgodny z obserwacjami.

W modelu kosmologicznego przyjmujemy, że długość fali fotonów CMB jest proporcjonalna do czynnika skali i czynimy to podstawowym (ale czy słusznym?) założeniem we wszelkich rozważaniach:

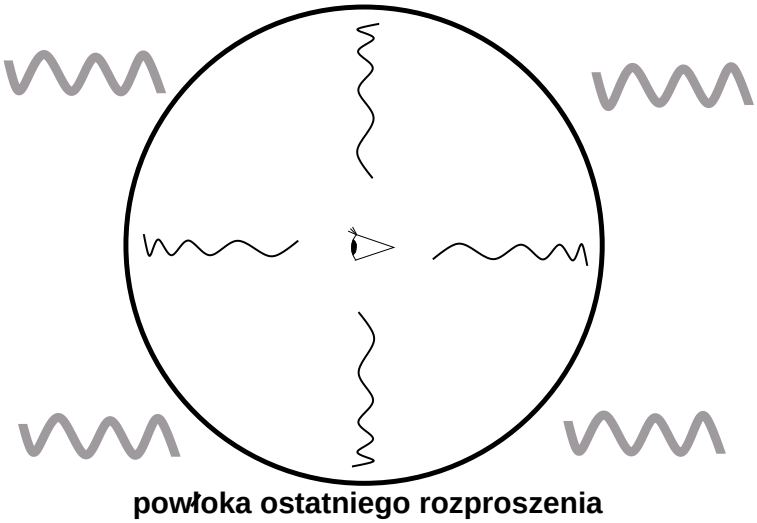
$$T_{cmb} = T_{cmb\,0}(1+z). \tag{51}$$

Ostatnio przeprowadzane są wyrafinowane eksperymenty (pomiary linii absorpcyjnych odległych obiektów), które zdają się je potwierdzać (LoSecco et al., 2001).

Anizotropia promieniowania a niejednorodność Wszechświata

Promieniowanie CMB jest anizotropowe przy względnych fluktuacjach (przestrzennych) rzędu $\Delta T/T \approx 10^{-5}$, a ich dość dokładny pomiar na skalach $0.3^\circ - 5^\circ$ stał się możliwy dopiero niedawno, głównie dzięki misjom balonowym BOOMERanG i MAXIMA.

Przed rekombinacją w materii i promieniowaniu istniały niejednorodności — których pochodzenia dokładnie nie znamy, gdyż współczesne teorie kosmologiczne nie sięgają w przeszłość tak daleko. Przyjmuje się najogólniej, że mogły one powstać we wczesnych fazach po Wielkim Wybuchu na skutek fluktuacji kwantowych. Od pewnego momentu we Wszechświecie istnieją więc przestrzenne zaburzenia, których ewolucję możemy symulować (głównie w przybliżeniu liniowym).



Rysunek 8: Obrazowa ilustracja powłoki ostatniego rozproszenia. Fotony tła zachowują informację o rozkładzie zaburzeń sprzed rozprzężenia, zaś docierając do nas ulegają poczerwienieniu.

W plazmie powstają fale akustyczne, dla których podstawowa skala długości jest związana z prędkością dźwięku w takim ośrodku i *horyzontem cząstek*, czyli odległością przebytą przez foton od Wielkiego Wybuchu (lub w przybliżeniu odległością Hubble'a). Siła tłumienia wyższych harmonicznych jest zależna przede wszystkim od zawartości materii barionowej.

Jak się okazuje, zaburzenia plazmy materii-promieniowania podczas rekombinacji zostają przez fotony CMB utrwalone — materia staje się dla promieniowania przezroczysta w bardzo krótkim okresie czasu. Tak więc otacza nas sfera, zwana *powłoką ostatniego rozproszenia* (*Last Scattering Shell*).

Odpowiedzialnymi za przenoszenie niejednorodności materii na temperaturę promieniowania jest kilka zjawisk. Na dużych skalach dominuje efekt *Sachsa-Wolfa*. W przybliżeniu newtonowskim możemy efekt opisać jako dwa przeciwstawne przyczynki:

1. fotony z gęstszych ośrodków ulegają ochłodzeniu, ponieważ muszą pokonać związany z zagęszczeniem potencjał grawitacyjny zgodnie ze wzorem $\delta T/T = \delta\Phi/c^2$ (Φ jest potencjałem poissonowskim, wynikającym w OTW z odpowiedniego cechowania)

2. zagęszczenia powodują dylatację czasu, w wyniku czego widzimy Wszechświat młodszy (i gorętszy!), co daje przyczynek $\delta T/T = -(2/3)\delta\Phi/c^2$

Ostatecznie daje to:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta\Phi}{3c^2}. \tag{52}$$

Na mniejszych skalach, dla nas istotniejszych, dominuje efekt Dopplera — wynikający z rozpraszania fotonów na poruszającej się plazmie. Jego wpływ na zmianę temperatury określa

się (w przybliżeniu, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{r}$ we wsp. współporuszających) prostym równaniem:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}}{c}. \tag{53}$$

Na jeszcze mniejszych skalach przeważa mechanizm zaburzeń adiabatycznych — fluktuacje materii i promieniowania są ze sobą sprzężone tak, że wielkością zachowaną w czasie jest entropia. Rozważane są także zaburzenia na przykład izokrzywiznowe, w których zachowana jest lokalna krzywizna przestrzeni, choć ich udział jest dużo mniejszy.

Oprócz wymienionych zjawisk pierwotnych, na obserwowane dziś fotony CMB wpływ mają także efekty wtórne, między innymi rejonizacja, efekt Sunayeva-Zeldowicza (kinetyczny i statyczny), soczewkowanie grawitacyjne przez struktury materii, całkowity efekt Sachsa-Wolfa itd.

Dość ważnym efektem, który należy wziąć pod uwagą podaczas analizy, jest rejonizacja. Po rozprzężeniu materii i promieniowania oba te składniki ewoluują praktycznie osobno, nie licząc efektów drugorzędowych. W pewnym jednak momencie, na skutek koncentracji materii, we Wszechświecie powstają nowe źródła promieniowania — pierwsze gwiazdy. Emitowane przez nie fotony jonizują powtórnie wodór, zwiększając liczbę swobodnych elektronów, na których rozpraszane jest promieniowanie tła. W symulacjach numerycznych przyjmuje się najczęściej, że rejonizacja jest procesem jednorodnym (w przestrzeni) i definiuje się *grubość optyczną na rozpraszanie* — τ_{rei}.

Tak więc fotony CMB mają rozkład zależny od trzech czynników: źródła („zupa" sprzed rozprzężenia i jej zaburzenia), swobodnej propagacji po rozprzężeniu (wpływ geometrii i ekspansji Wszechświata) i efektów drugorzędowych, wpływających na prawie swobodne fotony.

Rozkład multipolowy

Fotony CMB docierają do nas ze sfery ostatniego rozproszenia (o bardzo małej grubości). Obserwując je z Ziemi badamy ich rozkład na sferze. Zakładając, że przegląd pokrywa całe niebo, można od razu zastosować rozkład multipolowy. Jako baza (ortonormalna) rozkładu (na sferze) służą funkcje kuliste (harmoniki sferyczne) Y_{lm}. Rozkład fluktuacji promieniowania można przedstawić jako:

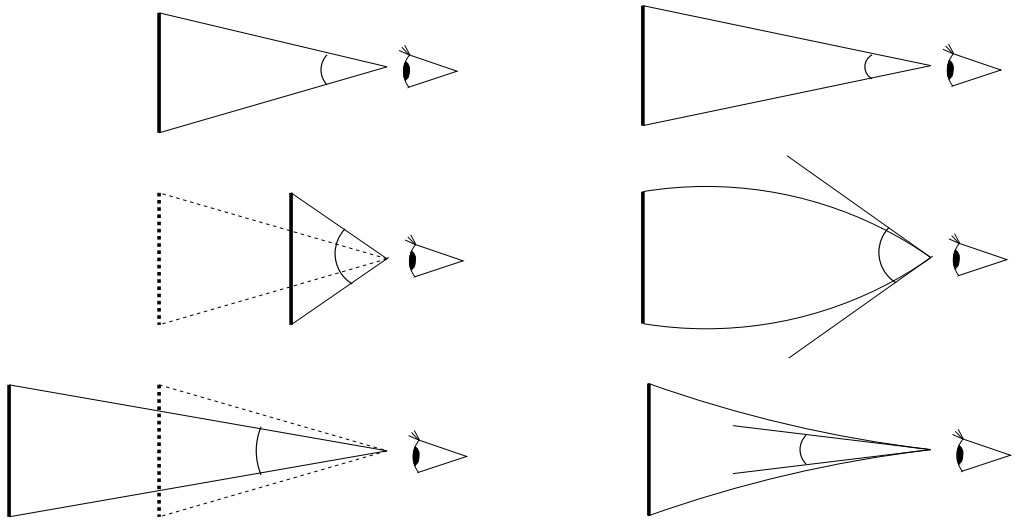
$$\Delta T(\hat{q}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\hat{q}), \tag{54}$$

gdzie $\hat{q}$ jest jednostkowym wersorem wskazującym punkt na jednostkowej sferze (wielkość $\hat{q}$ odpowiada parze współrzędnych na sferze $\{\theta,\ \varphi\}$).

Korzystając z ortonormalności bazy możemy wyznaczyć współczynniki a_{lm}:

$$a_{lm} = \int \mathrm{d}^2 q \Delta T(\hat{q}) Y^*_{lm}(\hat{q}). \tag{55}$$

Ponieważ zakładamy, że fazy poszczególnych przyczynków do rozkładu, odpowiadające



Rysunek 9: Zależność pozornej wielkości (kątowej) od krzywizny przestrzeni — kolejno zerowa, dodatnia, ujemna. Po lewej we współrzędnych współporuszających zdefiniowanych w rozdziale 2.2 — zmiana krzywizny po prostu oddala od nas lub przybliża wydarzenie o zadanym *redshifcie* z. Po prawej we współrzędnych χ, podobnie jak w równaniach (16), uzyskujemy pozorne zakrzywienie promieni świetlnych. Efekt za każdym razem jest taki sam — zmiana obserwowanych rozmiarów kątowych obiektu.

tej samej liczbie l, są przypadkowe (nieskorelowane), co jest założeniem dość mocnym i związanym z fazami pierwotnych zaburzeń, cała dostępna informacja zawiera się w wielkościach zdefiniowanych przez:

$$C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle, \tag{56}$$

gdzie uśrednianie odbywa się po liczbach m. Powszechnie używa się innej normalizacji współczynników C_l, zwanej *normalizacją COBE*:

$$\widetilde{C}_l = \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l. \tag{57}$$

Niestety praktyka od strony obserwacyjnej jest dużo bardziej skomplikowana, gdyż nie prowadzi się przeglądów całego nieba, lecz jedynie wybranych fragmentów[17]. Wtedy uzyskuje się rozkład (56) poprzez obliczanie funkcji autokorelacji na zbiorze danych, a następnie transformatę Fouriera (na powierzchni sfery). Są to kwestie techniczne i poświęcona im jest bogata literatura (np. Bond & Crittenden, 2001).

Rysunek 18 przedstawia rozkład będący najlepszym dopasowaniem do danych (patrz rozdz. 4.4), wyznaczony przy pomocy programy CMBFAST. Podstawowe cechy to:

- Obecność piku, zwanego *pierwszym pikiem akustycznym*, w pobliżu dwusetnego multi-

[17] Przeszkodą jest choćby Droga Mleczna, która uniemożliwia obserwacje w płaszczyźnie jej dysku. Poza tym interesujące nas skale zaburzeń to 4° i mniej, bo na tych właśnie skalach promieniowanie tła jest najbardziej niejednorodne

pola (odpowiadającego rozmiarom kątowym $\theta_1 \approx 2°$) — jego obecność związana jest ze wspomnianymi wcześniej falami akustycznymi w pierwotnej plazmie. Ponieważ możemy obliczyć wielkość charakterystyczną fal i znamy przesunięcie ku czerwieni dla powłoki ostatniego rozproszenia, położenie piku daje nam pojęcie o krzywiźnie przestrzeni (patrz rys. 9) i o wpływie ekspansji na drogę fotonów — zmieniające odległość (fizyczną) od powłoki. W okolicach pierwszego piku dominującymi efektami powodującymi niejednorodności rozkładu promieniowania są efekty: adiabatyczny i Dopplera, wspomniane wcześniej. Dla $\theta < \theta_1$ dominują zaburzenia adiabatyczne, zaś dla $\theta > \theta_1$ — efekt Sachsa-Wolfa.

- Obecność pików, będących odpowiednikami wyższych harmonicznych oscylacji. Ich wysokość uwarunkowana jest zawartością barionów w całkowitej gęstości — są one czynnikiem tłumiącym fale akustyczne. Za przeniesienie niejednorodności materii na promieniowanie odpowiada między innymi efekt adiabatyczny (izoentropowy).

Na rysunku 9 przedstawiona jest poglądowo zależność obserwowanych przez nas rozmiarów kątowych charakterystycznej wielkości zaburzenia od krzywizny przestrzeni.

Położenie pierwszego piku pozwala wyznaczyć przede wszystkim krzywiznę przestrzeni. Obserwowane lokalizacja w okolicach $l = 210$ (odpowiada rozmiarom kątowym $\theta \approx 1.7°$) wskazuje w granicach błędu, że nasz Wszechświat jest płaski albo bardzo bliski płaskiego.

O ile wyniki analizy danych anizotropii CMB dają świetne rezultaty dotyczące krzywizny — najdokładniej pozwalają wyznaczyć całkowite Ω_0, to są częściowo zdegenerowane ze względu na poszczególne składniki Ω_i — na przykład na przekroju $\Omega_m - \Omega_X$ maksimum funkcji ufności jest rozciągnięte wzdłuż krzywej $\Omega_m + \Omega_X = 1$. Z kolei dane SNIa zupełnie nie nadają się do wyznaczania krzywizny — jednak połączenie obu zbiorów i ich analiza pozwala wyznaczyć praktycznie wszystkie istotne dla naszego kosmologicznego modelu parametry.

Co ciekawe, nie istnieje analityczny wzór na położenie pierwszego piku (por. Frampton et al., 1998; Crooks et al., 2001)! Stąd konieczność używania dość potężnych narzędzi do analizy zaburzeń i propagacji fotonów tła. Teoretycznie pik można bowiem znaleźć porównując wielkość horyzontu cząstek (czyli odległość, na jaką mogłaby się przenieść informacja z prędkością światła) do naszej odległości od powłoki ostatniego rozproszenia. Ale tylko teoretycznie, bo w praktyce wielkość zaburzenia zawiera się pomiędzy odległością wyznaczoną przez prędkość światła c, a prędkość „dźwięku" w plazmie $c/\sqrt{3}$. Idąc tym tokiem myślowym wyprowadzamy wyrażenie na rozmiar kątowy zaburzeń na powłoce:

$$\theta = \alpha S_k\left(\sqrt{|\Omega_k|}\int_0^{a_{rec}} \frac{\mathrm{d}a}{H(a)a^2}\right) \Big/ S_k\left(\sqrt{|\Omega_k|}\int_{a_{rec}}^{1} \frac{\mathrm{d}a}{H(a)a^2}\right), \tag{58}$$

gdzie α odpowiada za wspomniana wcześniej wielkość horyzontu w chwili rekombinacji i zawiera się według teorii w przedziale $1/\sqrt{3} < \alpha < 1$.

Analiza danych

W ramach tejże pracy przeprowadziłem analizę danych z eksperymentów pomiaru blasku supernowych Ia oraz wyznaczania anizotropii promieniowania tła. Wykorzystane dane pochodzą z publikacji grup SCP, BOOMERanG oraz MAXIMA. Zebrane są one w dodatkach A i B.

Przedyskutowane zostaną możliwości weryfikacji idei pola skalarnego jako zamiennika stałej kosmologicznej. Celem jest wyznaczenie zależności podstawowych parametrów obecnych w opisanym modelu kosmologii friedmannowskiej, uwzględniającej pole skalarne, oraz próba ich wyznaczenia na podstawie danych.

4.1 Oprogramowanie i metody analizy

Na potrzeby obliczeń stworzyłem dość sporych rozmiarów pakiet oprogramowania przeznaczonego do analizy danych kosmologicznych. W najbliższej przyszłości postaram się o jego udostępnienie — po dokonaniu stosownych zmian i stworzeniu choćby minimalnej dokumentacji.

W skład pakietu, napisanego w języku FORTRAN77, wchodzą procedury wyznaczające wielkości konieczne do analizy danych supernowych, a także łączące stworzone oprogramowanie ze zmodyfikowanymi procedurami pakietu CMBFAST, służącego do symulacji anizotropii CMB. Oprócz tego sporą część zajmują funkcje statystyczne i graficzne.

Do pomniejszych celów, na przykład rozwiązywania równań Friedmanna, użyłem prostych programów pisanych w *Octavie* — darmowym odpowiedniku MATLABA — wraz z narzędziem do rysowania GNUPLOT.

Podstawowe cechy pakietu to:

- wyznaczanie parametrów modelu w oparciu o maksymalizację funkcji ufności[18] (uogólnienie metody najmniejszych kwadratów, pozwala stosować dowolne rozkłady błędów, nie tylko gausowskie),
- dopasowywanie dowolnych spośród zaprogramowanych parametrów,
- maksymalizacja funkcji ufności metodami sympleksów, maksymalizacji w kierunku największego wzrostu, Marquarta lub aproksymacji formą kwadratową,
- tworzenie przekrojów 2-wymiarowych w przestrzeni parametrów,

[18] ang. *maximum likehood* — bardzo popularna, powszechnie używana metoda analizy statystycznej

- całkowanie po zadanych parametrach (3-węzłowa interpolacja) lub ich dopasowywanie na niższym poziomie — „w tle",
- wyznaczanie funkcji ufności w oparciu o dane SNIa lub CMB,
- własne procedury dotyczące SNIa,
- użycie procedur pakietu CMBFAST do generowania rozkładu CMB,
- modyfikacje pakietu CMBFAST w celu uwzględnienia przybliżeń dynamicznego pola skalarnego.

Część pakietu odpowiedzialna za supernowe to przede wszystkim wyznaczanie odległości jasnościowej i jasności efektywnej zgodnie ze wzorami (48) i (49), które są zależne od parametrów modelu. Ta część kodu została napisana od podstaw.

CMBFAST jest darmowym pakietem, służącym do symulacji rozkładu multipolowego anizotropii promieniowania tła. Częściowy opis można znaleźć w Seljak & Zaldarriaga (1996) i na stronie internetowej `http://www.physics.nyu.edu/matiasz/CMBFAST/cmbfast.html`. Generuje on rozkład anizotropii, wykorzystując całkowanie po stożkach światła fotonów, co pozwala obliczyć widmo dużo szybkiej niż rozwiązując układ równań Boltzmana — na ogół dla zaburzeń skalarnych (zaburzenia tensorowe odpowiadają za fale grawitacyjne i zostały przeze mnie zaniedbane) dla pojedynczego rozkładu wystarczą około 2 minuty — dobry wynik, jeśli brać pod uwagę jednorazowe generowanie, ale dla próbkowania pełnej przestrzeni parametrów jest to wciąż za długo. Pakiet COSMICS[19] autorstwa Bertschingera potrzebuje jednak na tę samą czynność kilku godzin... Cena, jaką trzeba zapłacić za szybkość, to zgodność na poziomie 2% z kodem boltzmannowskim, co przy niestety niezbyt dokładnych dziś pomiarach, jest w zupełności wystarczające.

Na przestrzeni ostatnich miesięcy pojawił się także program DASh[20], napisany przez grupę z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Davis, pod względem prędkości bijący na głowę wszystkie inne programy. Różni się on od nich przede wszystkim tym, że najpierw dokonuje obliczeń na siatce w przestrzeni parametrów (co zajmuje około tygodnia) — zresztą przy użyciu CMBFASTa, następnie zaś poprzez metody numeryczne i półanalityczne generuje rozkład dla dowolnych parametrów. Jednak modyfikacja pakietu do moich potrzeb (uwzględnienie dynamiki pola) wydaje się być dość skomplikowane, szczególnie że pakiet jest bardzo intensywnie rozwijany i jest wciąż w fazie testów. Ma on tę nieprzyjemną wadę, że wszystkie wstępnie obliczone na siatce rozkłady zachowuje w postaci surowej — potrzebuje zatem kilka gigabajtów przestrzeni dyskowej. Inną wadą jest to, że nie kompiluje się poprawnie na wszystkich komputerach, ale to raczej kwestia techniczna, świadcząca jednak o niestabilności pakietu.

W momencie rozpoczęcia pisania pracy najbardziej sensownym rozwiązaniem wydał się pakiet CMBFAST i to on został przeze mnie zaadoptowany.

[19] *Cosmological Initial Conditions and Microwave Anisotropy Codes*, pierwszy publicznie dostępny kod, szczegóły na `http://arcturus.mit.edu/cosmics/`

[20] *Davis Anisotropy Shortcut*, `http://bubba.ucdavis.edu/DASh/`

CMBFAST jest bardzo zaawansowanym narzędziem o wielu możliwościach. Między innymi umożliwia uwzględnianie zaburzeń tensorowych, soczewkowania grawitacyjnego, rejonizacji (jednorodnej). Ze względu na czas obliczeń zdecydowałem się brać pod uwagę wyłącznie skalarne zaburzenia metryki (a więc pominąłem fale grawitacyjne, soczewkowanie).

Do części statystycznej wykorzystane zostały między innymi procedury z Brandt (1999) (maksymalizacja funkcji ufności), część stworzona od podstaw. Za część graficzną odpowiada biblioteka *PGPLOT*.

Procedura maksymalizacji funkcji ufności w zadanych problemach sprowadzała się do dopasowywania metodą najmniejszych kwadratów. Ponadto jednak pozwala (dla supernowych) brać pod uwagę także błędy na osi z, a więc błędy wyznaczania poczerwienienia. Jednak ze względu na wydłużony czas obliczeń i praktycznie niezmienione wyniki, opcja ta nie została wykorzystana.

Do wyznaczania błędów liczona była macierz kowariancji, a za błędy (rzędu σ) przyjęte pierwiastki elementów diagonalnych. Obszary ufności na przekrojach powstały z całkowania objętego konturem obszaru, przy czym wyrażenia podcałkowe (funkcje ufności) miały sens gęstości prawdopodobieństwa.

4.2 Analiza danych dotyczących supernowych

Wyrażenia (48) i (49) pozwalają obliczyć jasność (efektywną) obiektu typu SNIa przy danym przesunięciu ku czerwieni. Konfrontacja tej wielkości z wielkością obserwowaną daje możliwość wyznaczenia parametrów modelu kosmologicznego, którymi są:

M — jasność absolutna wybuchającej gwiazdy, podzielona przez stałą Hubble'a i inne parametry niezależne od konkretnych przypadków; jest to parametr „niechciany"

Ω_{m0} — obecna zawartość materii (bezciśnieniowego pyłu) we wszechświecie

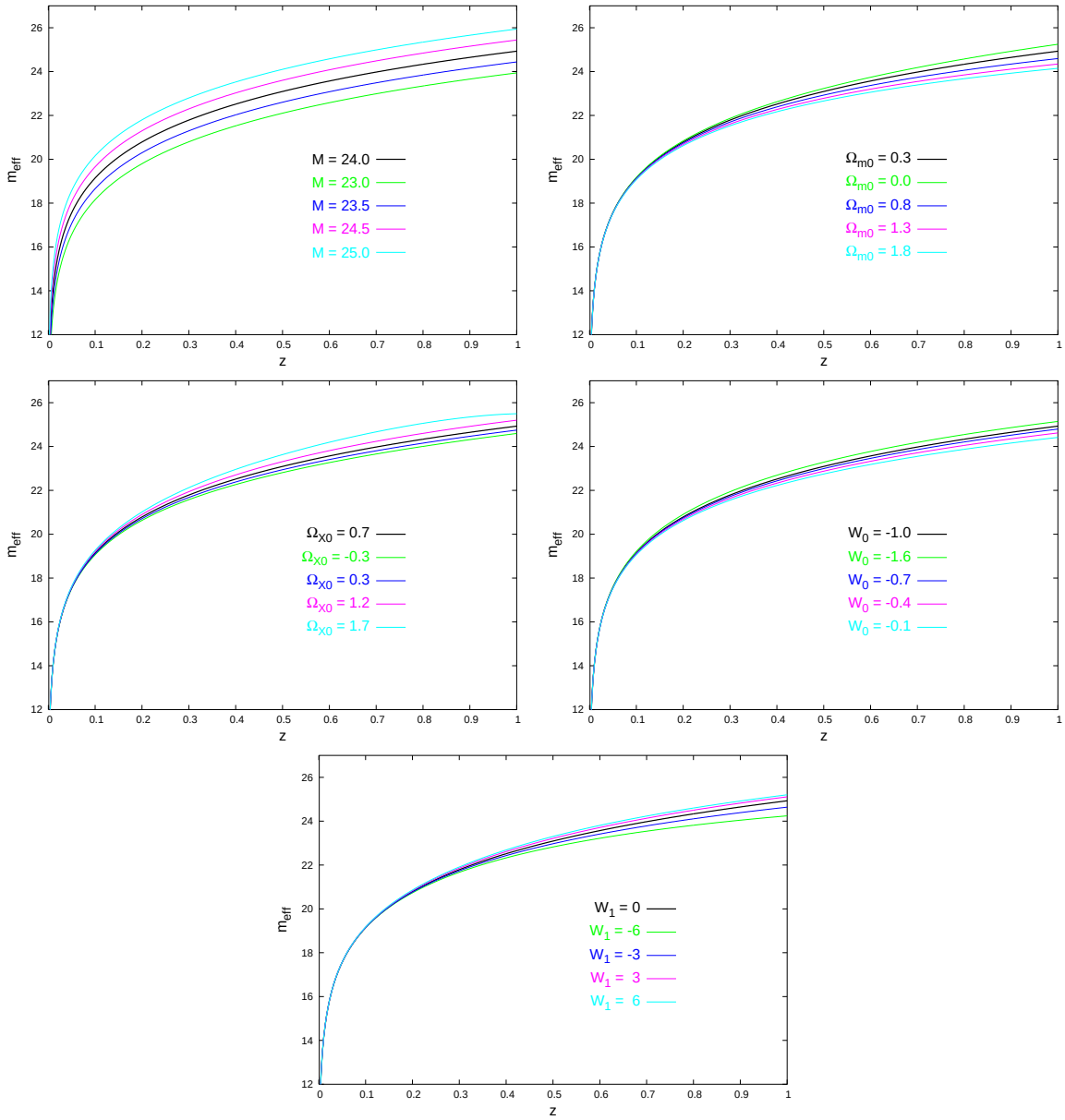
Ω_{X0} — obecna zawartość ciemnej energii (tu — pola skalarnego)

w_0, w_1 — parametry przybliżonej ewolucji pola, zdefiniowane w rozdziale 2.4

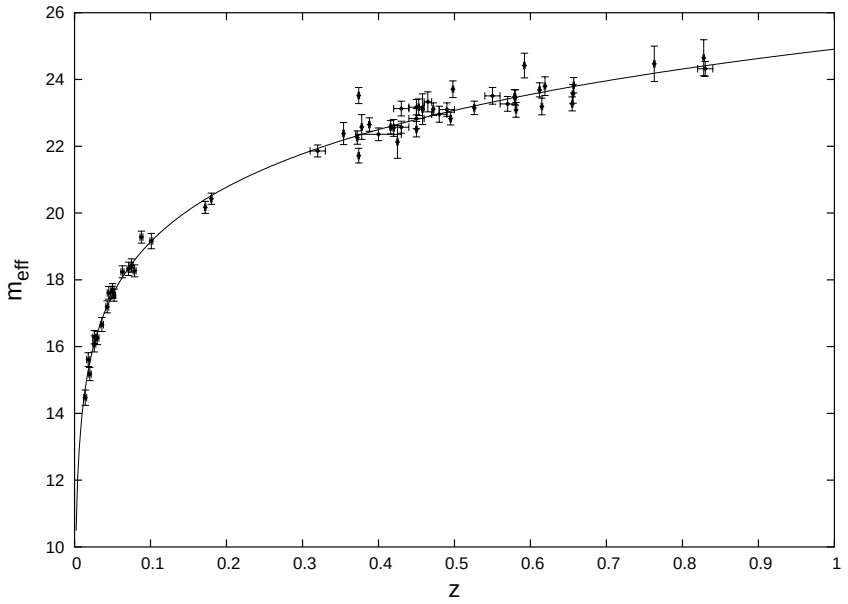
4.2.1 Odtworzenie znanych rezultatów

Do analizy wykorzystane zostały pełne dane dotyczące 60 supernowych — przedstawione są na rysunku 11 wraz z najlepszym dopasowaniem zależności $m_{eff}(z)$ z rozdziału 4.4. Rzutowanie funkcji ufności na płaszczyznę $\Omega_{m0} - \Omega_{X0}$ przedstawia rysunek 12. Rezultat jest identyczny, jak w Perlmutter et al. (1999). Niestety — wyniki są zdegenerowane ze względu na wielkość $1.2\Omega_{m0} + \Omega_{X0}$. Zależność $m_{eff}(z)$ jest bowiem mało wrażliwa na krzywiznę i tej wielkości nie da się sensownie wyznaczyć. Najlepsze dopasowanie parametrów $\{M, \Omega_{m0}, \Omega_{X0}\}$ daje:

$$M = 23.95 \pm 0.06,\ \Omega_{m0} = 1 \pm 0.6,\ \Omega_{X0} = 1.5 \pm 0.6, \tag{59}$$



Rysunek 10: Zależność jasności efektywnej m_{eff} od poczerwienienia z dla różnych wartości parametrów modelu. Jako zależność referencyjną (czarna kreska) przyjęto $M = 24$, $\Omega_{m0} = 0.3$, $\Omega_{X0} = 0.7$, $w_0 = -1$, $w_1 = 0$, a więc model ze stałą kosmologiczną. Na pierwszy rzut oka zmiany wszystkich poszczególnych parametrów zdają się mieć podobny wpływ na krzywą. I rzeczywiście dla niektórych z nich tak jest — jak zobaczymy później.



Rysunek 11: Jasność efektywna w funkcji poczerwienienia dla parametrów wyznaczonych w rozdziale 4.4 wraz z danymi.

przy ustalonych $w_0 = -1$ i $w_1 = 0$, to znaczy przy przyjęciu $\Omega_{X0} = \Omega_{\Lambda 0}$ (błędy odpowiadają 1σ, czyli prawdopodobieństwu $\approx 68\%$).

Na rysunku 12 zaznaczony został także *parametr deceleracji* definiowany jako:

$$q := -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda. \tag{60}$$

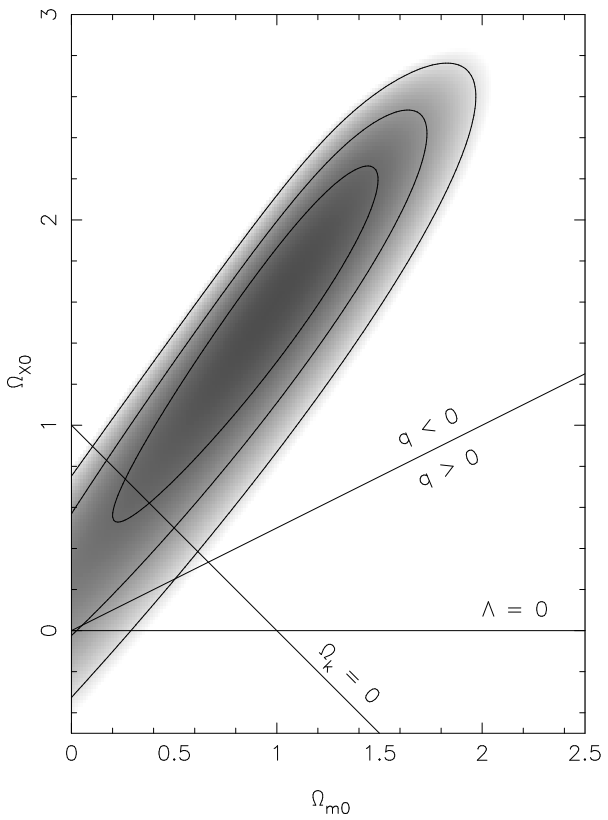
Jeśli przyjmuje on wartość dodatnią, ekspansja zwalnia, jeśli ujemną — przyspiesza. Analiza danych supernowych Ia wykazuje, że nasz Wszechświat przyspiesza. Uzyskanie tego rezultatu uznane zostało przez miesięcznik *PhysicsWorld* za jedno z najważniejszych wydarzeń roku 1998 — obok wykrycia masy neutrina i wytworzenia kondensatu Bosego-Einsteina[21]. Wcześniej bowiem istniało przekonanie, że ekspansja spowalnia — gdyż niewielu brało poważnie pod uwagę istnienie stałej kosmologicznej. Jak widać jednak, praktycznie nie da się zinterpretować danych SNIa (zakładając, że są poprawne) bez czynnika typu ciemnej energii, nie rezygnując z klasycznej kosmologii friedmannowskiej.

Jeśli na potrzeby analizy założymy zerową krzywiznę ($\Omega_{k0} = 0$), to otrzymamy parametry bliskie powszechnie dziś przyjmowanym:

$$M = 23.98 \pm 0.04,\ \Omega_{m0} = 0.32 \pm 0.09,\ \Omega_{X0} = 0.68 \pm 0.09. \tag{61}$$

Jak widać, przy ograniczeniu do modeli płaskich, możemy uzyskać dość dokładny wynik.

[21] `http://physicsweb.org/article/news/2/12/8`



Rysunek 12: Rzutowanie rezultatów na płaszczyznę $\Omega_{m0} - \Omega_{X0}$. Dla każdego punktu został osobno dopasowany parametr M, przez co zależność od niego została usunięta. Prawie identyczny rezultat daje wycałkowanie (także dla każdego punktu) po M. Kontury odpowiadają granicom ufności odpowiednio 68.3%, 95.4% i 99.7%. Ponadto zaznaczone zostały wszechświaty: płaski i bez stałej kosmologicznej oraz parametr deceleracji. $w_0 = -1$, $w_1 = 0$.

4.2.2 Pełna analiza

Dopasowanie wszystkich obecnych w modelu parametrów daje wynik:

$$\begin{aligned} M &= 24.021 \pm 0.012, \\ \Omega_{X0} &= 1.0 \pm 1.6, \\ w_0 &= -0.4 \pm 1.5, \\ w_1 &= 9 \pm 22, \\ \Omega_{m0} &= 1.2 \pm 1.3, \end{aligned} \tag{62}$$

zaś pełna macierz kowariancji przyjmuje postać:

$$C = \begin{pmatrix} 0.012719 & -0.0041925 & 0.14224 & 1.5368 & 0.039232 \\ -0.0041925 & 2.4261 & -0.47692 & -23.236 & 1.6713 \\ 0.14224 & -0.47692 & 2.0071 & 25.576 & 0.21828 \\ 1.5367 & -23.236 & 25.576 & 481.02 & -8.0308 \\ 0.039232 & 1.6713 & 0.21828 & -8.0308 & 1.4719 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Niestety — błędy są na tyle duże, że nie pozwalają jednoznacznie odrzucić stałej kosmologicznej i zastąpić jej ogólniejszym polem skalarnym. Szczególnie źle wyznaczanym parametrem jest w_1, który miałby precyzyjniej określać dynamikę pola. Jak widać, bez dodatkowych założeń dane z eksperymentu grupy *Supernova Cosmology Project* nie są w stanie powiedzieć nic więcej poza tym, że Wszechświat przyspiesza (bo akurat parametr deceleracji jest wyznaczany najlepiej). Krzywizna zaś przestrzeni (lub inaczej Ω_0) jest najgorzej wyznaczonym parametrem i jej wartości z powyższego dopasowania nie powinniśmy używać w dalszych rozważaniach.

Sytuację tę poprawi, jak pokazują symulacje danych (Goliath et al., 2001), planowany do umieszczenia na orbicie okołoziemskiej satelita *Supernovae Acceleration Probe*[22], mający na celu poszukiwanie właśnie supernowych typu Ia pod kątem ich znaczenia w kosmologii.

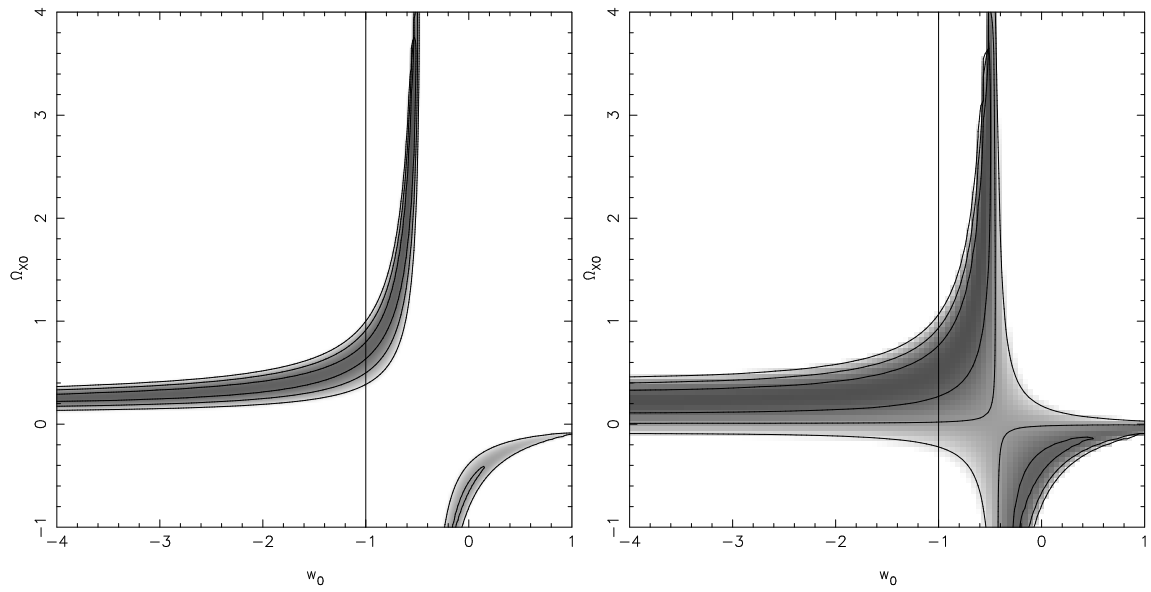
Na potrzeby rozważenia zależności pomiędzy poszczególnymi parametrami kosmologicznymi, załóżmy konkretną zawartość materii. Pomiary Ω_{m0} są dokonywane w sposób praktycznie niezależny od innych pomiarów kosmologicznych (jak te tutaj opisane) i opierają się na badaniu dynamiki (pól prędkości) wielkoskalowych struktur (Juszkiewicz et al., 2000; Ferreira et al., 1999). Połóżmy na potrzeby tego podrozdziału $\Omega_{m0} = 0.3$.

Na rysunku 13 przedstawione są rzutowania funkcji ufności na płaszczyznę $w_0 - \Omega_{X0}$. Jeśli rozważamy wyłącznie pole skalarne jako składnik „X", musimy ograniczyć się do $w_0 \in [-1, 1]$ — obszar ten został zaznaczony na rysunku. Właściwie nie ma sensu mówić o maksimach funkcji ufności — gdyż są one bardzo rozciągnięte. Możemy zaś zidentyfikować następujące obszary:

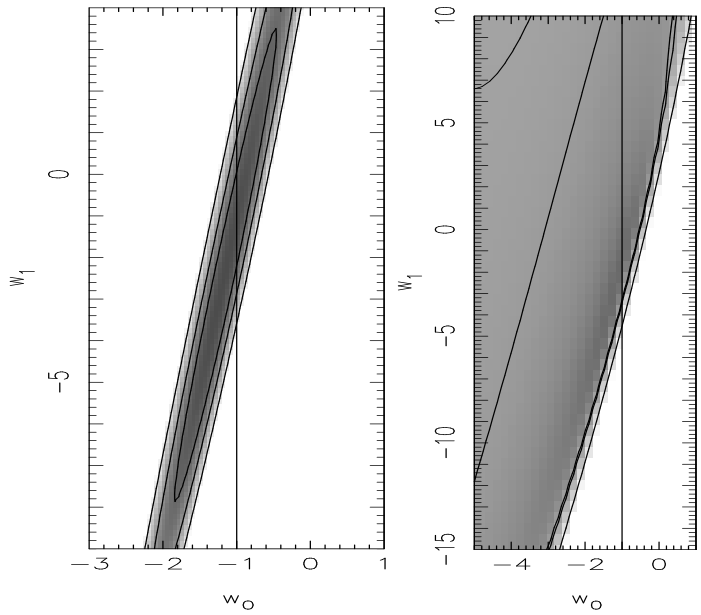
- Okolice $(w_0, \Omega_{X0}) = (0, -0.5)$ — ten obszar jest pozbawiony fizycznego sensu. Jeśli $w_0 = 0$, to składnik ciemnej energii staje się równoważny pyłowi, a więc daje dodatkowy wkład do Ω_{m0}. Z rysunku wynika, że wkład ten jest ujemny i znosi się z gęstością materii ($\Omega_{m0} = 0.3$). Tak więc okolice tego maksimum reprezentują pusty wszechświat (lub nawet o ujemnej zawartości zwykłej materii), co z pewnością nie odnosi się do naszego Wszechświata.

- Lewe ramię dla $w_0 < -1$ z punktu widzenia teorii skalarno-tensorowej również nie ma sensu. Niska zawartość Ω_{X0} jest rekompensowana przez negatywne wartości w_0. Jednak oznaczałoby to $\Omega_0 < 1$, czyli wszechświat o ujemnej krzywiźnie. Jak pokazują inne

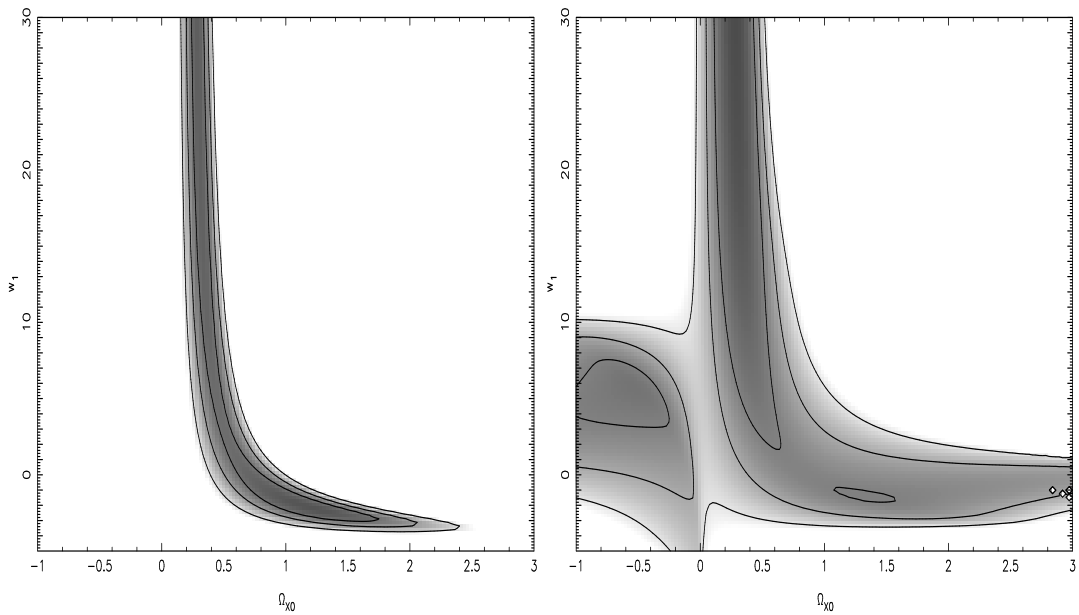
[22] `http://snap.lbl.gov/`



Rysunek 13: Funkcja ufności na powierzchni $w_0 - \Omega_{X0}$. Po lewej stronie — przekrój dla $\Omega_{m0} = 0.3$, $w_1 = 0$ i $M = 23.98$. Po prawej parametry w_1 i M zostały wyeliminowane poprzez każdorazowe dopasowanie — stąd rozmycie konturów. Zaznaczona prosta $w_0 = -1$ określa granice stosowalności teorii pola skalarnego (dla którego $w_0 \in [-1, 1]$). Kontury ufności jak na rysunki 12.



Rysunek 14: Funkcja ufności na powierzchni $w_0 - w_1$. Po lewej — przekrój dla $\Omega_{X0} = 0.7$ i $M = 23.98$. Po prawej parametr M został każdorazowo dopasowany, zaś funkcja została wycałkowana po $\Omega_{X0} \in [0.2, 1]$. Widać, że kontury ulegają niesamowitemu rozmyciu dla $w_0 < -1$, zaś zachowują kształt dla $w_0 > -1$. Skale na rysunkach są różne! Oba rysunki przy założeniu $\Omega_{m0} = 0.3$. Kontury ufności jak na rysunki 12.



Rysunek 15: Funkcja ufności na powierzchni $\Omega_{X0} - w_1$. Po lewej — przekrój dla $w_0 = -1$ i $M = 23.98$. Po prawej parametr M został każdorazowo dopasowany, zaś funkcja została wycałkowana po $w_0 \in [-1, 1]$. Oba rysunki przy założeniu $\Omega_{m0} = 0.3$.

badania (CMB), jest to raczej mało prawdopodobne.

- Górne ramię $\Omega_{X0} > 1$ — ta możliwość jest również odrzucana przez inne eksperymenty, choć na bazie samych danych dotyczących supernowych może być uzasadniona.

- $w_0 > -1$, $\Omega_{X0} < 1$ — najbardziej uzasadniony obszar, lecz w tych granicach nie ma wyraźnego maksimum. Konieczne byłyby dodatkowe ograniczenia, jakie daje na przykład pomiar anizotropii CMB

Rysunek 14 przedstawia zaś zależność między parametrami w_0 i w_1. Widać, że dla ustalonych pozostałych wielkości wynik jest zdegenerowany wzdłuż prostej, natomiast przy uwzględnieniu zmian pozostałych parametrów lewy brzeg konturu rozmywa się, pozostawiając prawy ostrym.

W przedstawionej analizie najmniejsze błędy uzyskaliśmy przy założeniu płaskości wszechświata, gdzie de facto były tylko 2 parametry do dopasowania (M i Ω_{m0}). Dla dopasowania $\{M, \Omega_{X0}, \Omega_{m0}\}$ z (61) błędy już okazują się duże, a to między innymi ze względu na bardzo duży współczynnik korelacji pomiędzy dwoma Omegami, co obrazuje na rysunku 12 przekrzywiona elipsa ufności. Natomiast dla pełnego dopasowania (62), błędów nie można już dyskutować w sensowny sposób.

Dzięki założeniu Ω_{m0} ustaliliśmy zależności pomiędzy pozostałymi parametrami modelu kosmologicznego. Dało to także pojęcie o tym, jakie parametry można z danych SNIa wyznaczyć.

4.3 Analiza danych dotyczących anizotropii CMB

Poprzez wykorzystanie procedur CMBFAST możliwe jest uzyskanie rozkładu multipolowego CMB. Parametrami użytego modelu są:

H_0 — stała Hubble'a w jednostkach km/s/Mpc

Ω_{b0} — zawartość barionów, czyli wszystkich znanych nam form materii (leptony, hadrony), głównie w postaci wodór i hel

Ω_{c0} — bezciśnieniowa ciemna materia oddziałująca grawitacyjnie — jak dotąd o nieznanej formie, najlepszym kandydatem są słaboodziałujące masywne cząstki (ang. *Weakly Interacting Massive Particles* – WIMPs), o których znalezieniu marzą fizycy cząstek; całkowita zawartość bezciśnieniowej materii we wszechświecie to $\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{c0}$

Ω_{X0} — obecna zawartość ciemnej energii (tu — pola skalarnego), w szczególnym przypadku stałej kosmologicznej

n — indeks spektralny pierwotnych zaburzeń, opisuje względną zależność amplitudy pierwotnych zaburzeń od skali przestrzennej (por. Peacock, 1999, s. 498)

w_0, w_1 — parametry przybliżonej ewolucji pola, zdefiniowane w rozdziale 2.4

τ_{rei} — grubość optyczna na rozpraszanie thomsonowskie fotonów na elektronach podczas rejonizacji (por. Peacock, 1999, s.596)

$\widetilde{C}_{10}$ — wartość dziesiątego multipola (widmo uzyskane z CMBFASTa nie jest wyskalowane); został on wyróżniony, ponieważ na jego wartość mają mały wpływ inne efekty, jak rejonizacja czy zaburzenia tensorowe; równie dobrze moglibyśmy jednak przyjąć $\widetilde{C}_4$ lub $\widetilde{C}_{20}$

4.3.1 Zależność rozkładu multipolowego od parametrów modelu

Przedstawmy najpierw ogólnie zależność rozkładu (położenia pików) od parametrów modelu. Na rysunkach 16 przedstawiony został czarną kreską rozkład referencyjny dla parametrów

$$H_0 = 65,\ \Omega_{b0} = 0.05,\ \Omega_{c0} = 0.25,\ \Omega_{X0} = 0.7\,, n = 1,\ w_0 = -1,\ w_1 = 0,\ \tau_{rei} = 0.1 \qquad (64)$$

— dla wszechświata płaskiego ze stałą kosmologiczną stanowiącą 70% masy oraz z rejonizacją o grubości optycznej 0.1. Na każdym panelu przedstawiono także kształt widma przy zmianie zadanych parametrów. Krzywe zostały znormalizowane tak, aby wysokość pierwszego piku wynosiła dokładnie 5500. Zamiast tego mogliśmy tworzyć krzywe dla ustalonego $\widetilde{C}_{10}$, jednak wtedy zmiany wysokości piku wprowadzałyby niepotrzebne komplikacje — wyniki poszczególnych symulacji CMBFASTa i tak trzeba skalować, a zastosowane tu przeskalowanie jest

znacznie wygodniejsze. W wielu publikacjach, szczególnie dotyczących kwintesencji (także w Steinhardt et al., 1998), autorzy pragnąc przedstawić wpływ pola skalarnego na rozkład CMB, nie stosują każdorazowego skalowania, co sugeruje dość skomplikowany wpływ kwintesencji na rozkład. Tymczasem, jak widać na panelach rysunku 16, w granicach rozsądnych zmian parametrów w_0 i w_1 widmo jest wyłącznie skalowane w poziomie.

Jedną z ważniejszych obserwacji jest ta, że zmiany parametrów w_0, w_1 i Ω_{X0} mają na widmo taki sam wpływ — skalują je wzdłuż osi l. Na rysunku 17 pokazano, przy ustalonym $w_1 = 0$, wartości Ω_{X0}, które przy zadanym w_0 dają rozkład maksymalnie zbliżony do referencyjnego. Poza skrajnymi wartościami udało się uzyskać pierwotny rozkład z dokładnością do grubości linii! Dla przypadku $w_0 = -0.2$, a więc bardzo daleko od modelu ze stałą kosmologiczną, udaje się uzyskać pierwotny rozkład poprzez zmianę wielkości Ω_{b0}. Z pewnością można zbliżyć się do wzorcowego rozkładu jeszcze bardziej poprzez modyfikację pozostałych parametrów.

Przedstawionej degeneracji nie da się znieść nawet przy dużo dokładniejszych pomiarach od obecnie dostępnych. Tak więc przy użyciu wyłącznie danych CMB nie ma sensu rozważać pola kwintesencji w sensie dopasowywania wszystkich dostępnych w modelu parametrów. Chyba że mamy bardzo szybkie narzędzie (albo bardzo szybkie komputery) do generowania rozkładu multipolowego i jesteśmy w stanie liczyć wartości funkcji ufności na wielowymiarowej siatce — co najmniej ośmio — wtedy mamy możliwość zobrazowania wszystkich zależności parametrów, podobnie jak w przypadku analizy SNIa z poprzedniego podrozdziału. Jeśli jednak obliczenie jednego węzła to czas około 2 minut na komputerze klasy Pentium 4, to kalkulacje takie są raczej trudne do wykonania.

4.4 „Najlepszy z wszechświatów"

W tym podrozdziale przedstawię dopasowanie parametrów modelu przy uwzględnieniu zarówno danych SNIa, jak i anizotropii CMB.

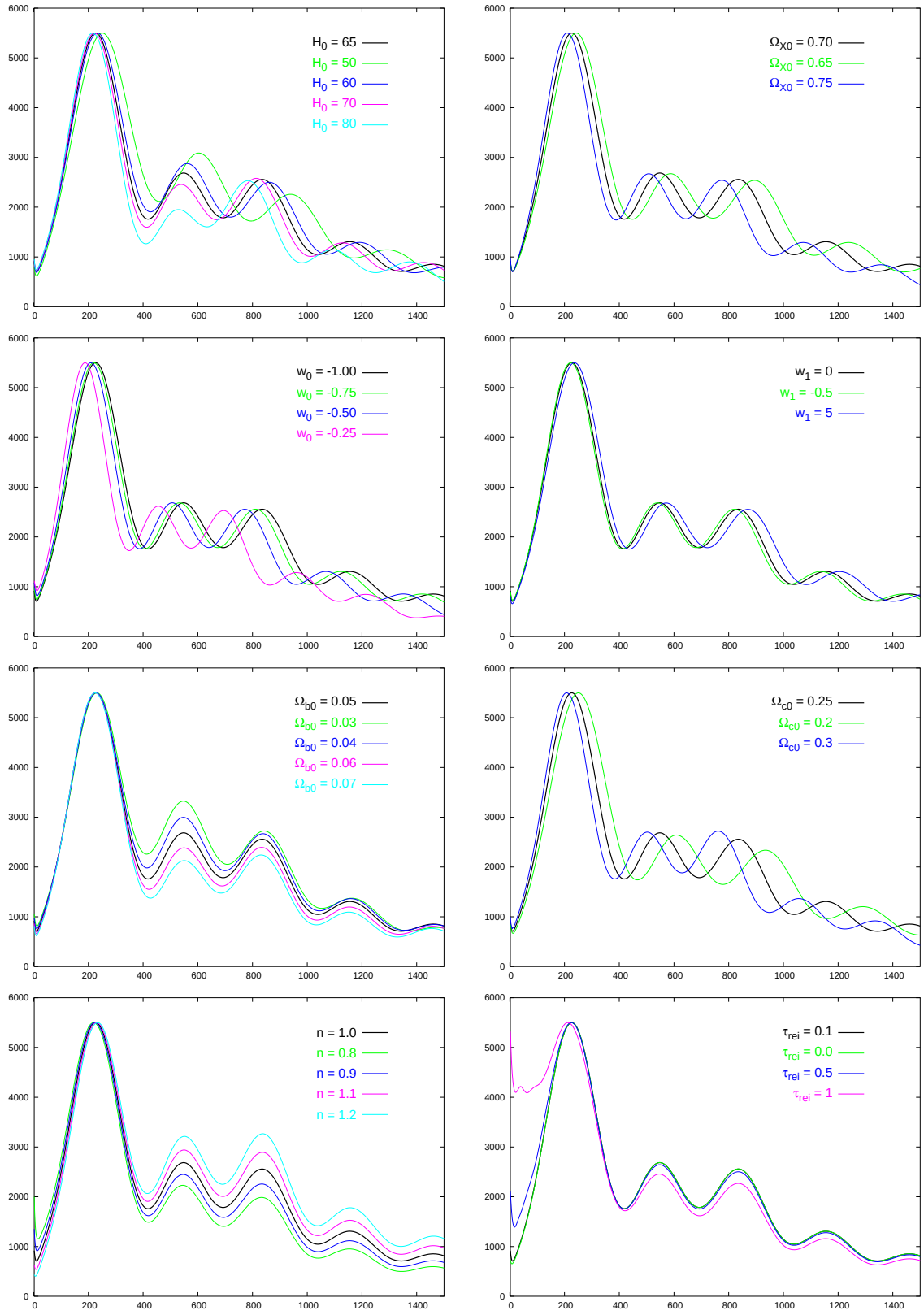
Uzyskane rozkłady multipolowe CMB były porównywane z wynikami obserwacji z eksperymentów BOOMERanG i MAXIMA. Na rysunku 18 przedstawiono zarówno krzywą reprezentującą widmo mocy CMB jak i wyznaczone wartości odpowiednich multipoli wraz z błędami. Użyte dane są efektem dość skomplikowanej obróbki sygnału (przez grupy badawcze) — szczegóły można znaleźć między innymi w Stompor et al. (2002) i Bond et al. (2000).

Jako że użyte zostały dwa różne zbiory danych, należy uwzględnić błędy systematyczne (rzędu 10%, jak podają autorzy — głównie złe wykalibrowanie odbiorników), a w efekcie dopuścić nieznaczne przeskalowanie jednych danych względem drugich. Wprowadzone zostały następujące parametry dodatkowe:

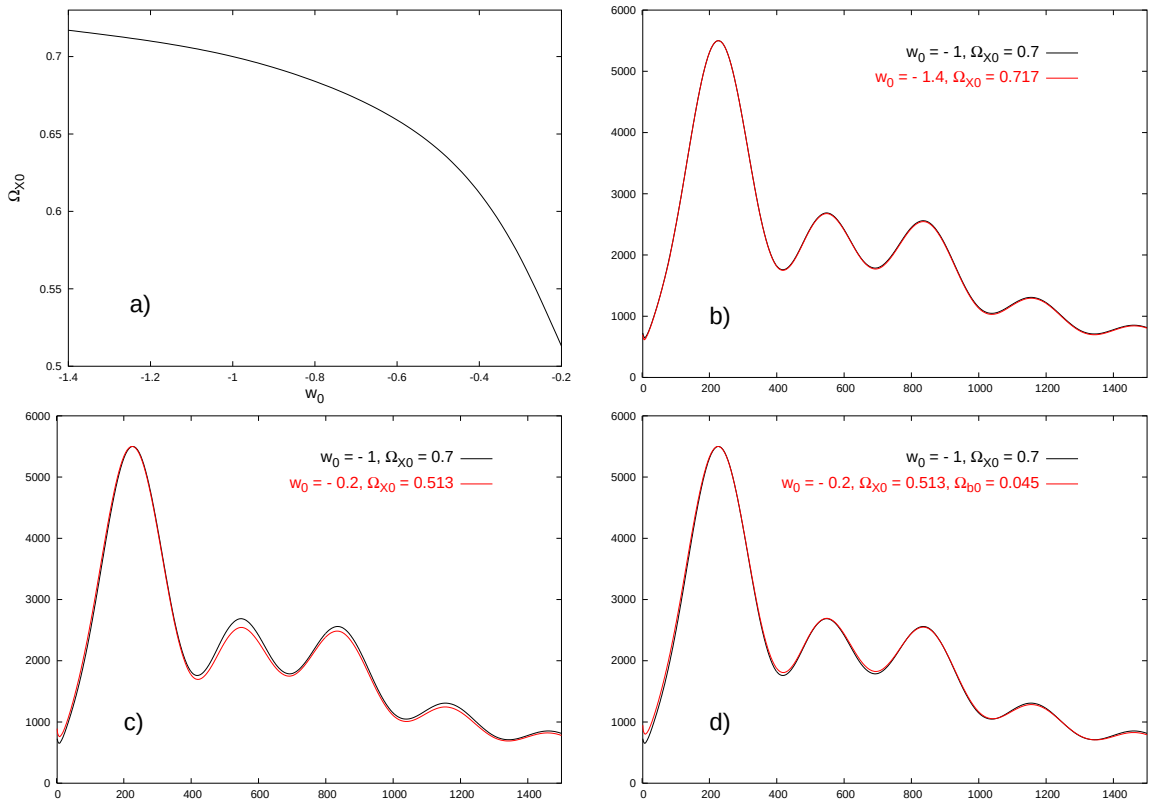
Γ — proporcja wartości ze zbioru A i B, $\widetilde{C}_i^{(B)} \to \widetilde{C}_i^{(B)} \times \Gamma$,

Δ_A — przesuniecie danych A ($\widetilde{C}_i^{(A)} \to \widetilde{C}_i^{(A)} + \Delta_A$),

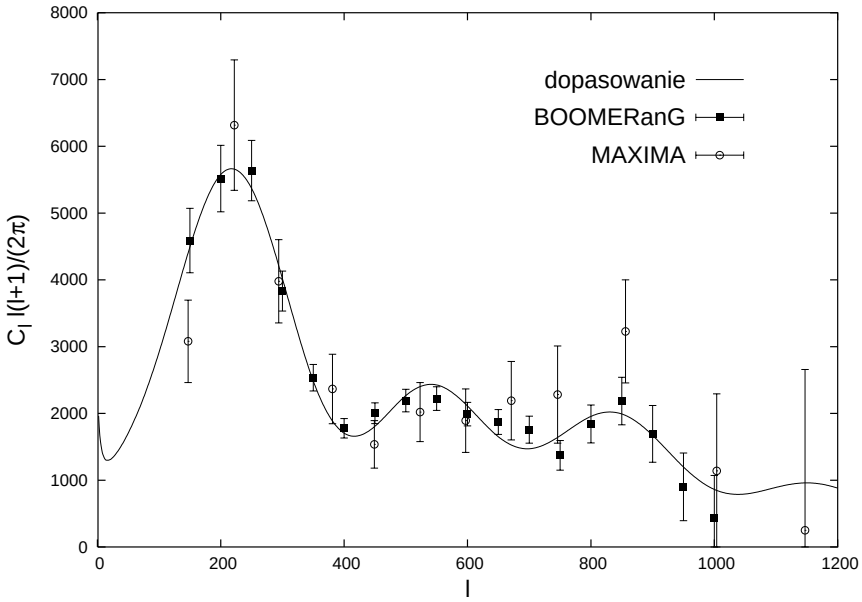
Δ_B — przesuniecie danych B ($\widetilde{C}_i^{(B)} \to \widetilde{C}_i^{(B)} + \Delta_B$).



Rysunek 16: Zachowanie rozkładu anizotropii przy zmianie poszczególnych parametrów modelu.



Rysunek 17: Ilustracja degeneracji pomiędzy parametrami w_0 i Ω_{X0}. Rozkład podstawowy ustalony według (64). Panel a) przedstawia wartości w_0 i Ω_{X0}, przy których otrzymujemy prawie identyczne rozkłady $\widetilde{C}_l$. Panele b), c) służą demonstracji, jak małe są odchylenia od rozkładu referencyjnego dla skrajnych wartości z panelu a). Rozkład z panelu d) różni się od tego z c) obniżoną zawartością materii barionowej, aby uzyskać lepsze nakrywanie widm. Celem rysunku jest zilustrowanie, jak przez zmianę pozostałych parametrów można „zakamuflować" istnienie pola kwintesencji o $w_0 \neq -1$ i otrzymać rezultat świadczący o stałej kosmologicznej.



Rysunek 18: Zbiory danych z dodatku B wraz z najlepszym dopasowaniem z rozdziału 4.4 dopasowaniem. Punkty danych są nieco przesunięte względem pierwotnych położeń, jak opisano w tekście.

Aby uniknąć absurdalnych dopasowań, gdzie punkty pomiarowe przesunięte są na przykład o 50% względem pierwotnych położeń, nałożyłem ograniczenia na zmiany parametrów: założyłem ich gausowski rozkład z parametrami $\sigma_\Gamma = 0.05$, $\sigma_{\Delta_A} = \sigma_{\Delta_B} = 100$.

Trzy powyższe parametry wraz z wielkością $\widetilde{C}_{10}$ były dopasowywane „w tle" — dla każdego zestawu szukanych parametrów kosmologicznych. Podczas obliczeń okazało się, że dopasowania takie są uzasadnione — wartości z obu zbiorów danych są względem siebie przesunięte o mniej więcej 5%, a więc w granicach sugerowanych przez autorów.

Podobnie w tle dopasowywany był parametr M odpowiedzialny za jasność absolutną supernowych — jest to obliczeniowo dużo mniej kosztowne niż dołożenie go jako typowego parametru modelu, gdyż zależy od niego wyłącznie składnik funkcji ufności związany z supernowymi, którego obliczenie jest znacznie mniej czasochłonne.

Ponadto okazuje się, że w przypadku analizy wyłącznie CMB nie ma większego sensu dopasowywać parametrów w_0 i w_1 — ich zmiany można rekompensować zmianami Ω_{X0}. Można je natomiast uwzględnić w przypadku połączonej analizy CMB i SNIa. Parametry te bowiem w rozsądnych granicach wartości nie mają wpływu na względna zmianę położenia pików, lecz na skalowanie całego widma — głównie poprzez fakt, że dominująca w ostatnich czasach ciemna energia zmienia naszą odległość od powłoki ostatniego rozproszenia. Odległość ta zależy między innymi od Ω_{X0}, w_0 i w_1. Jako że epoka dominacji ciemnej energii zaczęła się stosunkowo niedawno, a dynamika ekspansji zależy przede wszystkim od dominującego składnika, odległość od powłoki jest mało wrażliwa na wyrazy wyższego rzędu określające

dynamikę.

Niestety — zanim oprogramowanie przyjęło ostateczną postać, gwarantującą stabilność (w sensie numerycznym) i dobre rezultaty, musiało minąć trochę czasu (i „straconych" obliczeń, które okazywały się być błędnymi dopiero po kilku dniach liczenia...). Tak więc jako największy sukces uważam ostateczną postać procedur i całkiem dobrą funkcjonalność połączoną ze sporymi możliwościami. Oprogramowanie to traktuję także jako „inwestycję na przyszłość".

Dopasowanie modelu do danych SNIa i CMB

Wyniki dopasowania parametrów przy założeniu[23] $\Omega_0 = 1$ przedstawione są w tabeli:

parametr	ustalony/dopasowywany	wartość	parametr błędu σ
H_0	d	62.8	2.4
Ω_{X0}	d	$0.666 = 1 - \Omega_{c0} - \Omega_{b0}$	
w_0	u	-1	
w_1	u	0	
Ω_{b0}	d	0.044	0.008
Ω_{c0}	d	0.29	0.05
n	d	0.76	0.05
τ_{rei}	u	0	

dobroć dopasowania: 64.9509 (im mniejsza wartość, tym lepsze dopasowanie)

Dopasowanie dotyczy płaskiego wszechświata, bez rejonizacji. Wartość indeksu spektralnego n budzi jednak nieco niepokoju — w większości publikacji uzyskuje się rezultat $n \approx 0.9$, podczas gdy nasz znacznie odbiega od tej wartości (są „na styk" zgodne w zakresie 3σ). Częściowo winić za to można sposób dopasowywania przedstawiony w tym podrozdziale. Dopuszcza on bowiem błędy systematyczne i może odpowiednio przeskalować dane w niewielkim zakresie. Wynik jest jednak zaskakujący — przy nieznacznym przeskalowaniu uzyskiwalibyśmy inny rozkład pierwotnych zaburzeń. Obliczone błędy nie uwzględniają błędów parametrów skalujących — jest to cena za przyspieszenie obliczeń i dopasowywanie niektórych parametrów „w tle".

Najlepsze dopasowanie, jakie udało mi się przeprowadzić, uwzględnia aż 6 parametrów z 8 dostępnych w modelu. Pomija jedynie w_1 i τ_{rei}, których nie uwzględniłem ze względu na spodziewany długi czas dopasowania. Oto rezultat ponadtygodniowych obliczeń:

[23] Generowanie pojedynczego rozkładu multipolowego dla wszechświata płaskiego bez rejonizacji wymaga jedynie około 20 sekund (rejonizacja to dodatkowe 1.5 minuty), podczas gdy dla niepłaskiego — powyżej 2 minut. Stąd pierwsze dopasowanie możliwie jak największej ilości parametrów dla $\Omega_0 = 1$.

parametr	ustalony/dopasowywany	wartość	parametr błędu σ
H_0	d	62.5	3.2
Ω_{X0}	d	0.66	0.11
w_0	d	-0.9	0.3
w_1	u	0	
Ω_{b0}	d	0.044	0.009
Ω_{c0}	d	0.29	0.09
n	d	0.76	0.06
τ_{rei}	u	0	

dobroć dopasowania: 64.8969

O ile wartości dopasowania pozostały generalnie niezmienione, otrzymaliśmy inne parametry błędów. Niestety nie uzyskaliśmy wyniku świadczącego jednoznacznie o ewoluującym polu skalarnym — niepewność wyznaczenia w_0 jest znaczna i dopuszcza zarówno dynamiczne pole, jak i stałą kosmologiczną. Pozostałe parametry są zgodne (w zakresie 1σ) z rezultatami innych grup badawczych. Powodem dość dużych błędów jest uwzględnienie zmian w_0 — jak pokazaliśmy wcześniej, możemy uzyskać prawie niezmieniony rozkład multipolowy dla wielu wartości w_0 i Ω_{X0} — stąd nie można było tych wartości wyznaczyć dokładnie.

W powyższym dopasowaniu otrzymaliśmy w granicach błędów wszechświat płaski: $\Omega_0 = 0.994$.

4.5 Nowy projekt — szybkie generowanie rozkładu CMB

Zainspirowany kłopotami z czasem obliczeniowym opracowałem koncepcję ultra-szybkiego narzędzia do generowania widma multipolowego. Jego idea byłaby nieco zbliżona do DASha (który jest w stanie generować widmo w czasie 2 sekund), lecz dużo prostsza — polegałaby na:

a) znalezieniu minimalnego zbioru informacji koniecznego do odtworzenia krzywej C_l — prawdopodobnie wystarczą do tego położenia minimów i maksimów, punktów przegięcia i ewentualnie innych wrażliwych punktów wraz z pochodnymi pierwszych i być może drugich rzędów, dodatkowo między innymi współczynnik kompresji wzdłuż osi l,

b) wyznaczenie tych parametrów dla wybranych krzywych wygenerowanych przy pomocy programu CMBFAST lub na siatce parametrów modelu kosmologicznego,

c) znalezienie przybliżonych wyrażeń na zmianę parametrów krzywej jako funkcji parametrów modelu kosmologicznego lub zastosowanie interpolacji pomiędzy węzłami siatki.

Mam nadzieję, że takie oprogramowanie będę w stanie stworzyć w najbliższej przyszłości. Pozwoliłoby ono na bardzo szybkie dopasowywanie modeli do danych, co praktycznie mógłby

robić każdy, posiadając średniej jakości komputer. Możliwe byłoby też uwzględnianie dodatkowych parametrów w analizie bez obaw, że obliczenia staną się niemożliwe ze względu na ich czas.

Wnioski

Jeśli chodzi o weryfikację hipotezy pola skalarnego, wnioski są niestety dość pesymistyczne. Jak się okazało, pomiary wskazują na zachowanie ciemnej energii w sposób identyczny (w granicach błędów) do zachowania stałej kosmologicznej.

Przede wszystkim jednak w świetle przedstawionych obliczeń nie jest prawdą, że pomiary samej anizotropii promieniowania tła świadczą z dużą dokładnością o zerowej krzywiźnie Wszechświata. Jak widać na rysunku 17, dla zmienionej ewolucji pola otrzymamy prawie identyczny rozkład multipolowy dla wszechświata zamkniętego (np. $\Omega_0 \approx 0.86$), co dla wszechświata płaskiego! W publikacjach zaś znajdujemy szacowanie całkowitej zawartości energii we Wszechświecie na $\Omega_0 = 1 \pm 0.05$ (przy założeniu stałej kosmologicznej). Być może nie jest to takie oczywiste, jak się powszechnie sądzi.

Podobnie sprawa wygląda z wynikami analizy supernowych (por. rys. 13) — tu również mamy do czynienia z degeneracją wartości dopasowywanych. Wniosek jest podobny: jeśli rozważamy modele płaskie, to nie dopuszczamy dużych możliwości zmian w_0 i w_1. Aby zająć się tymi parametrami, należy zrezygnować z płaskości wszechświata. Autorzy Perlmutter et al. (1999) ani późniejsi nie zauważyli tego ograniczenia, przedstawiając często dopasowania w_0 do płaskiego wszechświata (założenie płaskości „wydaje się" pomocne, aby znieść degenerację wyników). We wszystkich jednak wyrażeniach w_0 występuje w parze z Ω_{X0}, a zakładanie płaskości to ograniczenie tego ostatniego, a więc i nałożenie ograniczeń na przybliżoną ewolucję pola.

Duże możliwości dało połączenie danych z eksperymentów CMB i SNIa, które doskonale uzupełniają się i pozwalają wyznaczyć praktycznie wszystkie parametry modelu kosmologicznego. Dopasowanie uzyskane w rozdziale 4.4 wskazuje na bardzo niewielkie odchylenie od ścisłej stałej kosmologicznej. Nie jest to jednak negatywna weryfikacja teorii pola skalarnego — jak wspomnieliśmy w rozdziale 2.3, pole imituje dokładnie Lambdę, gdy jego ewolucja jest zahamowana, to znaczy $\dot{\phi} = 0$ — wtedy $w_0 = -1$ i $w_1 = 0$. Takie zachowanie kwintesencji możemy uzyskać dla innych klas potencjałów pola lub dla potencjału (37) dla niektórych $\alpha > 1$. Jednak w wypadku, gdy pole podczas dominacji (czyli od $z \approx 1.3$ do teraz, czyli $z = 0$) zachowuje się dokładnie jak stała kosmologiczna, skalarno-tensorowa grawitacja może okazać się niezmiernie trudna do badania. Dostępne dane dotyczące supernowych próbkują zachowanie pola jedynie do $z \approx 0.8$. Miejmy bowiem na uwadze, że wcześniejsza ewolucja praktycznie nie zostawia po sobie śladów — jeśli udział gęstości energii pola w gęstości całkowitej jest zaniedbywalny, nie powinien wpływać na proces ewolucji niejednorodności (formowania struktur kosmicznych) ani inne procesy zachodzące w przeszłości.

Analiza na podstawie dostępnych danych sugeruje więc jedynie lekkie odchylenia od ścisłej stałej kosmologicznej. To samo dotyczy także Roukema et al. (2002) — choć nie do końca wiadomo, na ile uzasadniona jest ich metoda.

Weźmy jednak pod uwagę, jak niedoskonałe są dane SNIa. Podczas obliczeń przekonałem się, że selektywne odrzucenie gwiazd znajdujących się w odległości rzędu 3σ od krzywej teoretycznej $m_{eff}(z)$ może prowadzić do bardzo zmienionych wyników, na przykład przy założeniu płaskości możemy otrzymać rezultat $\Omega_{m0} = 0.4 \pm 0.1$, $\Omega_{X0} = 0.6 \pm 0.1$. Pamiętając, że to właśnie te dane pozwalają wyznaczyć proporcję pomiędzy dwiema Omegami (w połączeniu z danymi CMB), to nie należy im bezgranicznie ufać. Są one najsłabszym ogniwem prezentowanych tu rozważań.

Niestety nie mogłem przeprowadzić pełnej i dokładnej analizy, głównie z braku koniecznej ilości dostępnych komputerogodzin. Jest to także kwestia przyjętej przeze mnie metody. Większość zespołów badawczych najpierw oblicza rozkłady CMB na siatkach parametrów, co zajmuje dość dużo czasu w zależności od ilości parametrów i gęstości siatki, dopiero potem zaś szuka najlepszych dopasowań. W tej pracy postanowiłem za każdym razem generować rozkład multipolowy, czego nie uważam teraz za najlepsze rozwiązanie. Ponadto okazało się, że procedury dopasowywujące z Brandt (1999) pozostawiają naprawdę wiele do życzenia — te najszybsze nie są zbieżne, a zbieżne są strasznie wolne. I też nie zawsze zbieżne. Niestety przekonałem się o tym zbyt późno, aby je zmienić. Lepszym rozwiązaniem byłoby użycie publicznie dostępnych i sprawdzonych funkcji.

Pisząc oprogramowanie po raz drugi, uniknąłbym z pewnością wielu pułapek, w które wpadłem tym razem.

Oprócz bezpośrednich wyników naukowych praca zaowocowała także innymi rezultatami. Opracowałem pomysł superszybkiego oprogramowania do generowania rozkładu multipolowego promieniowania tła, opisany w rozdziale 4.5, którego realizację mam nadzieję wkrótce rozpocząć. Dawałoby ono nowe możliwości szybkiej analizy statystycznej danych. Byłby to, jak sądzę, materiał publikowalny, choć nie można marzyć o popularności porównywalnej z CMBFASTem (292 cytowania według ADS w momencie pisania pracy). Z pewnością wystarczyłby jednak do celów dydaktycznych i wstępnej analizy.

Nie można zaniedbać też zdobytego doświadczenia (głównie na własnych błędach) i wiedzy, którą należało przyswoić przy realizacji tego projektu — nie jest to wprawdzie absolutnie nowa dziedzina, lecz postęp, jaki dokonał się w ciągu ostatnich kilku lat, jest zdumiewający. Po takim przygotowaniu mam nadzieję, że zajęcie się kosmologią bardziej „zawodowo" będzie dużo prostsze i bardziej owocne.

Praca może stwarzać wrażenie niedokończonej — brak jest kilku ostatecznych dopasowań. Powodem są ogromne wymagania czasowe obliczeń. Okazały się one barierą trudną do pokonania — stąd pomysły usprawnienia oprogramowania, które niestety nie miało szans na pojawienie się w tej pracy.

Niedokończone analizy budzą jednak nadzieję, że w niedługim czasie będę miał możliwość

ich kontynuowania. Wierzę, że wraz z dodatkowymi danymi, które prawdopodobnie niedługo się pojawią, będę mógł wysunąć interesujące wnioski, których ta praca jest zwiastunem.

Inną ciekawą kwestią do zbadania byłoby rozważanie teorii skalarno-tensorowej, lecz z polem skalarnym nie tylko minimalnie sprzężonym z grawitacją. Jest to równoważne zmiennej w czasie „stałej" grawitacji G. Wprawdzie (stosunkowo) duże jej zmiany zostały wykluczone przez chronometraż pulsarów (Will, 2001), to na skalach kosmologicznych są wciąż możliwe. Ciekawym byłoby przeanalizowanie zarówno danych SNIa (to włączałoby wykorzystanie zależnego od sił grawitacji modelu gwiazdy), jak i CMB (należałoby przedyskutować choćby tworzenie fal akustycznych w plazmie przy zmienionej stałej G).

Otwartych zagadnień wciąż pozostaje wiele... Kosmologia jest bardzo rozległą dziedziną, zarazem pełną niepewności, w fazie intensywnego rozwoju. Śledzenie tego rozwoju będzie, według mnie, jedną z najbardziej fascynujących rzeczy w obecnym stuleciu.

Dane wykorzystane przy analizie blasku supernowych Ia

z	Δz	m_{eff}	Δm_{eff}
0.014	0.002	14.47	0.23
0.018	0.002	15.61	0.21
0.020	0.002	15.18	0.20
0.026	0.002	16.08	0.24
0.026	0.002	16.28	0.20
0.030	0.002	16.26	0.20
0.036	0.002	16.66	0.21
0.043	0.002	17.19	0.18
0.045	0.002	17.61	0.19
0.050	0.002	17.63	0.18
0.050	0.002	17.69	0.20
0.052	0.002	17.54	0.18
0.063	0.002	18.24	0.18
0.071	0.002	18.33	0.20
0.075	0.002	18.43	0.20
0.079	0.002	18.27	0.18
0.088	0.002	19.28	0.18
0.101	0.002	19.16	0.23
0.172	0.001	20.17	0.18
0.180	0.001	20.43	0.17
0.320	0.010	21.86	0.18
0.354	0.001	22.38	0.33
0.372	0.001	22.26	0.20
0.374	0.001	21.72	0.22
0.374	0.001	23.52	0.24
0.378	0.001	22.58	0.37
0.388	0.001	22.65	0.20
0.400	0.030	22.36	0.19
0.416	0.001	22.57	0.20
0.420	0.001	22.55	0.25

z	Δz	m_{eff}	Δm_{eff}
0.425	0.001	22.13	0.49
0.430	0.010	22.57	0.18
0.430	0.010	23.13	0.22
0.450	0.001	22.51	0.23
0.450	0.010	22.83	0.30
0.450	0.010	23.17	0.23
0.453	0.001	23.17	0.25
0.458	0.001	23.11	0.46
0.465	0.005	23.33	0.30
0.472	0.001	23.11	0.19
0.480	0.010	22.96	0.24
0.490	0.010	23.10	0.20
0.495	0.001	22.83	0.19
0.498	0.001	23.71	0.25
0.526	0.001	23.15	0.20
0.550	0.010	23.51	0.25
0.570	0.010	23.27	0.22
0.579	0.001	23.48	0.22
0.580	0.001	23.46	0.23
0.581	0.001	23.09	0.22
0.592	0.001	24.42	0.37
0.612	0.001	23.69	0.21
0.615	0.001	23.19	0.25
0.619	0.001	23.80	0.28
0.655	0.001	23.27	0.21
0.656	0.001	23.57	0.28
0.657	0.001	23.83	0.23
0.763	0.001	24.47	0.53
0.828	0.001	24.65	0.54
0.830	0.010	24.32	0.22

Powyższe dane pochodzą z Perlmutter et al. (1999).

Dane wykorzystane przy analizie fluktuacji CMB

BOOMERanG

$\langle l \rangle$	$\widetilde{C}_l$ [μK^2]	$\Delta\widetilde{C}_l$ [μK^2]
100	3722	441
150	4671	482
200	5599	497
250	5719	452
300	3915	299
350	2617	198
400	1860	146
450	2085	155
500	2274	169
550	2304	177
600	2072	176
650	1954	186
700	1839	203
750	1455	222
800	1925	284
850	2268	356
900	1776	425
950	983	507
1000	517	636

MAXIMA

$\langle l \rangle$	$\widetilde{C}_l$ [μK^2]	$\Delta\widetilde{C}_l$ [μK^2]
77	1999	590.50
147	2960	618
222	6092	976.50
294	3830	623.50
381	2270	520
449	1468	356
523	1935	441.50
597	1811	476
671	2100	587.50
746	2189	728.50
856	3104	771.50
1004	1084	1152
1147	223	2408

Dane pochodzą z Netterfield et al. (2001) i Lee et al. (2001). Wartości i błędy podane są w normalizacji COBE.

Metoda największej wiarygodności

Pełny opis metody znajduje się w Brandt (1999), ale przebrnięcie przez tę całkiem pokaźnych rozmiarów księgę w celu odnalezienia szukanych informacji może nie być aż tak proste. Tu przytoczę jedynie najważniejsze elementy wraz z opisem metody uzyskiwania błędów dla przypadku 2-wymiarowego, gdzie błędami obarczone są tylko pomiary jednej z wartości. W większości wypadków w tej pracy wykorzystany jest właśnie ten przypadek, choć stworzony pakiet umożliwia obliczanie ogólniejszych modeli.

Załóżmy, że mamy zbiór n punktów pomiarowych postaci $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$. Jednocześnie dla każdego pomiaru zakładamy rozkład błędów $f_i(y)$, mający znaczenie gęstości prawdopodobieństwa. Dopasowywując krzywą parametryzowaną przez zbiór wielkości $\boldsymbol{\lambda}$, definiujemy funkcję wiarygodności jako:

$$L(\boldsymbol{\lambda}) := \prod_{i=1}^{n} f_i(y_i - y_{\text{model}}(\boldsymbol{\lambda}, x_i)). \tag{65}$$

Szukając najlepszego dopasowania krzywej $y_{\text{model}}(\boldsymbol{\lambda}, x)$, należy zmaksymalizować funkcję ufności (ze względu na $\boldsymbol{\lambda}$). Jest to jednoznaczne z minimalizacją funkcji

$$l(\boldsymbol{\lambda}) := -\log\left(L\left(\boldsymbol{\lambda}\right)\right) = -\sum_{i=1}^{n} \log\left(f_i\left(y_i - y_{\text{model}}\left(\boldsymbol{\lambda}, x_i\right)\right)\right). \tag{66}$$

Zauważmy jednocześnie, że zakładając gausowski rozkład błędów

$$f_i(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_i^2}\right), \tag{67}$$

funkcja minimalizowana przyjmuje postać:

$$l(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - y_{\text{model}}\left(\boldsymbol{\lambda}, x_i\right)\right)^2}{2\sigma_i^2} + C(\boldsymbol{\sigma}), \tag{68}$$

a więc procedura sprowadza się do metody najmniejszych kwadratów.

Błędy minimalizacji otrzymujemy obliczając macierz drugich pochodnych funkcji $l(\boldsymbol{\lambda})$ dla wartości $\boldsymbol{\lambda}$ minimalizujących l, a następnie macierz do niej odwrotną. Tak uzyskana macierz jest (o ile błędy nie są wielkie) *macierzą kowariancji* rozkładu estymatorów $\boldsymbol{\lambda}$. Elementy

macierzy są zdefiniowane jako:

$$c_{ij} := E(\lambda_i \lambda_j) = \int \mathrm{d}\lambda^n F(\boldsymbol{\lambda}) \lambda_i \lambda_j \tag{69}$$

(czyli wartości oczekiwane iloczynów $\lambda_i \lambda_j$), zaś błędy określone przez $\Delta\lambda_i := \sqrt{c_{ii}}$ odpowiadają niepewności $1\sigma_i$ dla wyznaczonej wielkości λ_i. Elementy pozadiagonalne odpowiadają współczynnikom korelacji pomiędzy poszczególnymi estymatorami λ_i.

Eliminacja zbędnych parametrów

Chcąc przedstawić funkcję ufności w n-wymiarowej przestrzeni parametrów, musimy niestety posłużyć się co najwyżej płaszczyzną dwuwymiarową. Funkcja ufności jest postaci:

$$F : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R} \tag{70}$$

Załóżmy, że płaszczyzna ma być opisana parametrami λ_m i λ_n. W tym celu możemy dokonać:

- *przekroju*
  Dla ustalonych wartości $\{\lambda_i;\, i \neq m,\, i \neq n\}$ otrzymujemy

$$\widetilde{F}(\lambda_m, \lambda_n) : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}. \tag{71}$$

- *wycałkowania po niechcianych parametrach*
  Funkcja ufności ma sens gęstości prawdopodobieństwa, tak więc całkując po zadanym zbiorze zmiennych, uzyskujemy rozkład dla pozostałych zmiennych:

$$\widetilde{F}(\lambda_m, \lambda_n) := \int_{\lambda_i \in \mathcal{R}:\, i \neq m,\, i \neq n} \mathrm{d}\lambda^{n-2} F(\boldsymbol{\lambda}), \tag{72}$$

  gdzie całkowanie odbywa się po wszystkich λ_i za wyjątkiem $i = m$ oraz $i = n$.

- *dopasowania ze względu na niechciane parametry*
  Dla każdej pary wartości (λ_m, λ_n) można maksymalizować funkcję $F(\boldsymbol{\lambda})$ ze względu na pozostałe parmetry. Tak więc:

$$\widetilde{F}(\lambda_m, \lambda_n) := \mathrm{Max}\left(F\left(\boldsymbol{\lambda}\right), \{\lambda_i : i \neq m,\ i \neq n\}\right). \tag{73}$$

Metody te można łączyć. Wszystkie one zostały zaimplementowane w stworzonym oprogramowaniu i wykorzystane w tej pracy.

Mając do dyspozycji funkcję ufności na płaszczyźnie, możemy bez problemu wyznaczyć kontury ufności, odpowiadające zadanym prawdopodobieństwom znalezienia rozwiązania we-

wnątrz nich. Wystarczy zdefiniować funkcję ufności z „obcięciem”, tzn.:

$$\widetilde{F}_\alpha(\lambda_m, \lambda_n) := \begin{cases} \widetilde{F}(\lambda_m, \lambda_n) & \text{jeli} \quad \widetilde{F}(\lambda_m, \lambda_n) \geq \alpha, \\ 0 & \text{jeli} \quad \widetilde{F}(\lambda_m, \lambda_n) < \alpha. \end{cases} \tag{74}$$

Teraz wystarczy, mając zadane prawdopodobieństwo P, rozwiązać równanie:

$$\frac{\int_{\mathcal{R}^2} \widetilde{F}_\alpha(\lambda_m, \lambda_n)}{\int_{\mathcal{R}^2} \widetilde{F}(\lambda_m, \lambda_n)} = P \tag{75}$$

ze względu na α, aby otrzymać wartość funkcji ufności odpowiadającą szukanemu konturowi.

Literatura

J.R. Bond, D. Pogosyan, S. Prunet, K. Sigurdson, P. Ade, A. Balbi, J. Bock, J. Borrill, A. Boscaleri, K. Coble, B. Crill, P. de Bernardis, P. Farese, P. Ferreira, K. Ganga, M. Giacometti, S. Hanany, E. Hivon, V. Hristov, A. Iacoangeli, A. Jaffe, A. Lange, A. Lee, L. Martinis, S. Masi, P. Mauskopf, A. Melchiorri, T. Montroy, B. Netterfield, S. Oh, E. Pascale, F. Piacentini, B. Rabii, S. Rao, P. Richards, G. Romeo, J. Ruhl, F. Scaramuzzi, D. Sforna, G. Smoot, R. Stompor, C. Winant, P. Wu, „The Quintessential CMB, Past & Future", w Proc. CAPP-2000 (AIP), CITA-2000-64, `astro-ph/0011379`

J.R. Bond, A.H. Jaffe, L.E. Knox, „Radical Compression of Cosmic Microwave Background Data", Astrophys. J. 533 (2000) 19, `astro-ph/9808264`

J.R. Bond, R.G. Crittenden, „CMB Analysis", in Proc. NATO ASI "Structure Formation in the Universe", red. R.G. Crittenden & N.G. Turok (Kluwer) 2001, `astro-ph/0108204`

T. Chiba, T. Nakamura, „Feasibility of Reconstructing the Quintessential Potential Using SNIa Data", Phys. Rev. D62 (2000) 121301, `astro-ph/0008175`

S. Brandt, „Analiza danych – metody statystyczne i obliczeniowe", wyd. polskie: Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999

S.M. Carroll, „The Cosmological Constant", Living Rev. Relativity 4, (2001), `http://www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-1carroll/`

S.M. Carroll, „Lecture Notes on General Relativity", `gr-qc/9712019`

J.L. Crooks, J.O. Dunn, P.H. Frampton, Y.J. Ng, R. Rohm, „CMB with Quintessence: Analytic Approach and CMBFAST", Mod. Phys. Lett. A16 (2001) 63, `astro-ph/0010404`

G. Efstathiou, S. Moody, J.A. Peacock, W.J. Percival, C. Baugh, J. Bland-Hawthorn, T. Bridges, R. Cannon, S. Cole, M. Colless, C. Collins, W. Couch, G. Dalton, R. De Propis, S. P. Driver, R.S. Ellis, C.S. Frenk, K. Glazebrook, C. Jackson, O. Lahav, I. Lewis, S. Lumsden, S. Maddox, P. Norberg, B.A. Peterson, W. Sutherland, K. Taylor, „Evidence for a non-zero Λ and a low matter density from a combined analysis of the 2dF Galaxy Redshift Survey and cosmic microwave background anisotropies", MNRAS 330L (2002) 29E, `astro-ph/0109152`

M. Eriksson, R. Amanullah, „Fitting inverse power-law quintessence models using the SNAP satellite", `astro-ph/0202157`

P.G. Ferreira, R. Juszkiewicz, H.A. Feldman, M. Davis, A.H. Jaffe, „Streaming velocities as a dynamical estimator of Omega", Astrophys. J. 515 (1999) L1, `astro-ph/9812456`

P.H. Frampton, Y.J. Ng, R. Rohm, „Cosmic Background Radiation Temperature Anisotropy: Position of First Doppler Peak", Mod. Phys. Lett. A13 (1998) 2541, astro-ph/9806118

D. Goldsmith, *Największa pomyłka Einsteina? Stała kosmologiczna i inne niewiadome w fizyce Wszechświata*, wyd. polskie: Wyd. Prószyński i S-ka, Warszawa 1998

A. Goobar, S. Perlmutter „Feasibility of Measuring the Cosmological Constant Lambda and Mass Density Omega using Type Ia Supernovae", Astrophys. J. 450 (1995) L14, astro-ph/9505022

M. Goliath, R. Amanullah, P. Astier, A. Goobar, R. Pain „Supernovae and the nature of the dark energy", A&A 380, (2001), 6-18

E.H. Gudmundsson, G. Bjornsson, „Dark Energy and the Observable Universe", Astrophys. J. 565 (2002) 1, astro-ph/0105547

S. Hanany, P. Ade, A. Balbi, J. Bock, J. Borrill, A. Boscaleri, P. de Bernardis, P.G. Ferreira, V.V. Hristov, A.H. Jaffe, A.E. Lange, A.T. Lee, P.D. Mauskopf, C.B. Netterfield, S. Oh, E. Pascale, B. Rabii, P.L. Richards, G.F. Smoot, R. Stompor, C.D. Winant, J.H.P. Wu, „MAXIMA-1: A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on angular scales of 10 arcminutes to 5 degrees", Astrophys. J. 545 (2000) L5, astro-ph/0005123

W. Hu, N. Sugiyama, J. Silk, „The Physics of Microwave Background Anisotropies", astro-ph/9504057

R. Juszkiewicz, P.G. Ferreira, H.A. Feldman, A.H. Jaffe, M. Davis, „Evidence for a low-density Universe from the relative velocities of galaxies", Science 287 (2000) 109, astro-ph/0001041

J. Kujat, A.M. Linn, R.J. Scherrer, D.H. Weinberg, „Prospects for Determining the Equation of State of the Dark Energy: What can be Learned from Multiple Observables?", zatwierdzone do druku w Astrophys. J., astro-ph/0112221

A.T. Lee, P. Ade, A. Balbi, J. Bock, J. Borrill, A. Boscaleri, P. De Bernardis, P.G. Ferreira, S. Hanany, V.V. Hristov, A.H. Jaffe, P.D. Mauskopf, C.B. Netterfield, E. Pascale, B. Rabii, P.L. Richards, G.F. Smoot, R. Stompor, C.D. Winant, J.H.P. Wu, „A High Spatial Resolution Analysis of the MAXIMA-1 Cosmic Microwave Background Anisotropy Data", Astrophys. J. 561 (2001) L1, astro-ph/0104459

J.M. LoSecco, G.J.Mathews, Y. Wang, „Prospects for Constraining Cosmology with the Extragalactic Cosmic Microwave Background Temperature", Phys. Rev. D64 (2001) 123002, asrto-ph/0108260 i referencje.

J.C. Mather, E.S. Cheng, D.A. Cottingham, R.E. Eplee Jr, D.J. Fixsen, T. Hewagama, R.B. Isaacman, K.A. Jensen, S.S. Meyer, P.D. Noerdlinger, S.M. Read, L.P. Rosen, R.A. Shafer, E.L. Wright, C.L. Bennett, N.W. Boggess, M.G. Hauser, T. Kelsall, S.H. Moseley Jr., R.F.

Silverberg, G.F. Smoot, R. Weiss, D.T. Wilkinson, „Measurement of the cosmic microwave background spectrum by the COBE FIRAS instrument", Astrophys. J. 420, (1994), 439

C.B. Netterfield, P.A.R. Ade, J.J. Bock, J.R. Bond, J. Borrill, A. Boscaleri, K. Coble, C.R. Contaldi, B.P. Crill, P. de Bernardis, P. Farese, K. Ganga, M. Giacometti, E. Hivon, V.V. Hristov, A. Iacoangeli, A.H. Jaffe, W.C. Jones, A.E. Lange, L. Martinis, S. Masi, P. Mason, P.D. Mauskopf, A. Melchiorri, T. Montroy, E. Pascale, F. Piacentini, D. Pogosyan, F. Pongetti, S. Prunet, G. Romeo, J.E. Ruhl, F. Scaramuzzi, „A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background", przyjęte do Astrophys. J., `astro-ph/0104460`

J.C. Niemeyer, M. Reinecke, W. Hillebrandt, „Models of Type Ia Supernova Explosions", XIII Rencontres de Blois – Frontiers of the Universe, June 17-23, 2001, `astro-ph/0203369` i referencje.

J. North, „Historia Astronomii i Kosmologii", wyd. polskie: Wydawnictwo Książnica, Katowice 1999

J.A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press, Cambridge 1999

P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton 1993

S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R.A. Knop, P. Nugent, P.G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D.E. Groom, I.M. Hook, A.G. Kim, M.Y. Kim, L.C. Lee, N.J. Nunes, R. Pain, C.R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R.S. Ellis, M. Irwin, R.G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B.J. Boyle, A.V. Filippenko, T. Matheson, A.S. Fruchter, N. Panagia, H.J.M. Newberg, W.J. Couch, „Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae", Astrophys. J. 517 (1999) 565, `astro-ph/9812133` i referencje.

A.G. Riess, A.V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiattia, A. Diercks, P.M. Garnavich, R.L. Gilliland, C.J. Hogan, S. Jha, R.P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B.P. Schmidt, R.A. Schommer, R.C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N.B. Suntzeff, J. Tonry, „Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant", Astron. J. 116 (1998) 1009, `astro-ph/9805201`

B.F. Roukema, G.A. Mamon, S. Bajtlik, „The Cosmological Constant and Quintessence from a Correlation Function, Comoving Fine Feature in the 2dF Quasar Redshift Survey", A&A 382 (2002) 397, `astro-ph/0106135`

V. Sahni, „The Cosmological Constant Problem and Quintessence", przyjęte do Classical and Quantum Gravity, `astro-ph/0202076`

T.D. Saini, S. Raychaudhury, V. Sahni, A.A. Starobinsky, „Reconstructing the Cosmic Equation of State from Supernova distances", Phys. Rev. Lett. 85 (2000) 1162, astro-ph/9910231

U. Seljak, M. Zaldarriaga, „A Line of Sight Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies", Astrophys. J. 469 (1996) 437, astro-ph/9603033

A.A. Starobinsky, „How to determine an effective potential for a variable cosmological term", JETP Lett. 68 (1998) 757, astro-ph/9810431

R. R. Caldwell, R. Dave, P. J. Steinhardt, „Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State", Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 1582, astro-ph/9708069

R. Stompor, M. Abroe, P. Ade, A. Balbi, D. Barbosa, J. Bock, J. Borrill, A. Boscaleri, P. De Bernardis, P.G. Ferreira, S. Hanany, V. Hristov, A.H. Jaffe, A.T. Lee, E. Pascale, B. Rabii, P.L. Richards, G.F. Smoot, C.D. Winant, J.H.P. Wu, „Cosmological implications of the MAXIMA-I high resolution Cosmic Microwave Background anisotropy measurement", Astrophys. J. 561 (2001) L7, astro-ph/0105062

R. Stompor, A. Balbi, J.D. Borrill, P.G. Ferreira, S. Hanany, A.H. Jaffe, A.T. Lee, S. Oh, B. Rabii, P.L. Richards, G.F. Smoot, C.D. Winant, J.H.P. Wu, „Making Maps Of The Cosmic Microwave Background: The MAXIMA Example", Phys. Rev. D65, (2002) , 022003, astro-ph/0106451

C.M. Will, „The Confrontation between General Relativity and Experiment", Living Rev. Relativity 4, (2001), http://www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-4will/